Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Übungsaufgaben zu Mathematik I für Ingenieure, WS 2006/07
Serie 3, Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus, Eigenwerte, Eigenvektoren, Vektorrechnung

Die Aufgaben finden Sie auch auf meiner Homepage:
http://www.math.uni-magdeburg.de/∼christop/ unter Lehre.

Hinweis: Mit **Wichtig!** habe ich die Aufgaben gekennzeichnet, die unbedingt zu üben sind, die anderen sind zum selbständigen Üben!

36. (Wichtig!) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 9x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) mit Hilfe einer inversen Matrix ;
b) mit Hilfe der Cramerschen Regel;
c) mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus!

37. (Wichtig a), c) und e)!) Lösen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus folgende Gleichungssysteme. Geben Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatriz und der erweiterten Koeffizientenmatriz an:

a) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -4 \\ 5x & - & y & + & z & = & 0 \\ 7x & + & 3y & + & 7z & = & -8 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 11 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rcrcrcr} 7x_1 & + & 8x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 18x_1 & + & 21x_2 & + & 13x_3 & = & 8 \end{array}$$

e) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & & & = & -7 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 7 \end{array}$$

f) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & - & 7x_5 & = & 9 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \end{array}$$

38. (Wichtig!) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2 & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & + & 2x_3 & + & b & = & 0 \end{array}$$

Für welche Werte a und b besitzt das System
α) genau eine Lösung,
β) keine Lösung und γ) unendlich viele Lösungen?
Lösen Sie das System für $a = 1$ und $b = 4$.

39. Für welche Werte von a besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} (2+a^2)x & - & 3ay & = & 0 \\ ax & + & (2-a^2)y & = & 0 \end{array}$$

außer der trivialen Lösung $x = y = 0$ noch andere Lösungen? Geben Sie dann alle Lösungen an!

40. (Wichtig!) Lösen Sie die vier Gleichungssysteme der Form $A\vec{x}_i = \vec{b}_i,\ i = 1,\ldots,4$, gleichzeitig mit Hilfe des vollständigen Gauß-Algorithmus. Nachdem Sie unterhalb der Hauptdiagonale Nullen erzeugt haben, müssen Sie auch Nullen oberhalb der Hauptdiagonale erzeugen. Wenn Sie richtig gerechnet haben, ergibt sich auf Grund der besonderen Wahl der Vektoren $b_1, ..., b_4$ die Inverse der Matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 6 & -5 \\ -2 & -1 & 10 & -6 \end{bmatrix};\ b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

41. (Wichtig a)!) Von folgenden Gleichungssystemen bestimme man

(α) die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems,

(β) die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.

a) $$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 8 & -1 \\ -10 & 5 & 25 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 13 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 26 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 43 \end{array}$$

42. (Wichtig b)!) Für welche Werte λ besitzen die homogenen linearen Gleichungssysteme nichttriviale Lösungen? Geben Sie alle nichttrivialen Lösungen an!

$a)$ $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & (4-\lambda)x_3 & = & 0 \end{array}$$

$b)$ $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & \lambda x \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & \lambda y \\ 2x & + & 2y & + & 5z & = & \lambda z \end{array}$$

43. (Wichtig!) Lösen Sie die Eigenwertaufgabe $Ax = \lambda x$. Geben sind jeweils alle Eigenvektoren an.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

44. (Selbststudium!) Bestimmen Sie für die Matrix A die aus den Eigenvektoren von A bestehende Matrix C mit der Eigenschaft, dass $C^{-1}\,A\,C = D$ ist, wobei D die Diagonalmatrix aus den Eigenwerten von A ist.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

45. (Selbststudium!) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 18 \\ 25 \\ 24 \end{bmatrix} \quad ; \quad c = \begin{bmatrix} 18,1 \\ 24,9 \\ 23,9 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix A^{-1} !

b) Berechnen Sie die Kondition des Gleichungssystems $Ax = b$!

c) Das System $Ax = b$ hat die Lösung $x = [1 \quad 1 \quad 1]^T$. Welche Lösung besitzt das System $Ax = c$?

46. Gegeben sind die Vektoren
$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 = [2\,,\,1\,,\,4]^T$ und $\vec{b} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = [1\,,\,-2\,,\,3]^T$.
Berechnen Sie: $|\vec{a}|$; $\quad \vec{a} + 2\vec{b}$; $\quad 3\vec{a} - 2\vec{b}$; $\quad \vec{a} \cdot \vec{b}$!

47. (Wichtig!) Gegeben ist ein Viereck mit den Ecken
$A(-2;-2)$, $B(2;-1)$, $C(2;2)$, $D(-2;1)$.
Man bestimme: die „Seitenvektoren“ $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$; die „Diagonalvektoren“ $\vec{AC}$, $\vec{BD}$ und die Länge dieser Vektoren; die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

48. Anfangspunkte und Endpunkte zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien durch Strecken miteinander verbunden. Die Halbierungspunkte der beiden Verbindungsstrecken seien Anfangs- und Endpunkt eines Vektors $\vec{c}$. Es soll gezeigt werden, daß der Vektor $\vec{c}$ derselbe bleibt, wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ unabhängig voneinander parallel zu sich verschoben werden.

49. Ein Vektor bildet mit der x-Achse und der z-Achse Winkel von $40°$ und $80°$. Ermitteln Sie seinen Winkel mit der y-Achse!

50. (Wichtig) Man beweise mit Hilfe von Vektoren!

   a) Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, dann ist es ein Rhombus.

   b) Satz des Thales: Der Umfangswinkel über dem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter Winkel.

51. Gegeben sind drei aufeinanderfolgende Eckpunkte eines Parallelogramms: $A(-3;-2;0), B(3;-3;1), C(5;0;2)$. Bestimmen Sie:

    a) den vierten Eckpunkt,

    b) je einen Vektor in Richtung der Winkelhalbierenden!

52. (Wichtig!) Man zerlege den Vektor $\vec{c} = -\vec{e_1} + 8\vec{e_2}$ in Komponenten in Richtung der Vektoren $\vec{a} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ und $\vec{b} = -2\vec{e_1} + \vec{e_2}$.

53. (Wichtig!) a) Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit von

$$\vec{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad !$$

    b) Stellen Sie $\vec{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{x_1}; \vec{x_2}$ und $\vec{x_3}$ dar !

54. Sind die Vektoren

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \text{linear unabhängig ?}$$

55. (Wichtig!) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$; $\vec{b} = \vec{e_3}$ und $\vec{c} = \vec{e_1} + \vec{e_3}$ eine Basis bilden. Stellen Sie den Vektor $\vec{p} = 5\vec{e_1} + \vec{e_2} + 0,5\vec{e_3}$ bzgl. der Basis $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar.

56. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{F} = (7;-7;12)$ in drei Komponenten, die parallel zu $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (2;3;1)$ und $\vec{c} = (3;1;2)$ verlaufen !

57. (Wichtig!) Eine Kraft $\vec{F} = [8, 11, -5]^T$ ist in Komponenten parallel und senkrecht zur Richtung $\vec{a} = [2, 1, -3]^T$ zu zerlegen.

58. Gegeben sind die Vektoren

    $\vec{a} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$; $\vec{b} = \vec{e_1} + \vec{e_3}$ und $\vec{c} = \vec{e_1} - \vec{e_3}$.

    Man berechne $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\vec{b}\cdot\vec{c}$; $\vec{a}\times\vec{c}$; $|\vec{a}\times\vec{c}|$; $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$; $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$; $(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}+\vec{c})$.

59. (Wichtig!) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten

    $P_1(2;9;6)$, $\quad P_2(3;2;1)$, $\quad P_3(4;3;2)$?

60. Vereinfachen Sie:

    a) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$; $\quad$ b) $(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) \cdot [(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})]$!