Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Gerd Christoph

Aufgaben zur Vorlesung Mathematik II für Ingenieure, SoSe 2007

(4. Serie, Tangentialebene, Differentiale, Fehlerrechnung, Extremwertbestimmung, Methode der kleinsten Quadrate)

49. Zeigen Sie, dass $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ für folgende Funktionen gilt:

    a) $z = \sqrt{y + 2x}$ und b) $z = \ln \dfrac{2x + 3y}{2x - 3y}$.

50. Zeigen Sie, dass $u = 2\cos^2(x - t/2)$ die DGL $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$ erfüllt.

51. Man bestimme die Konstante c derart, dass die Ebene $z = 2$ Tangentialebene der Fläche $z = f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 10x + 2y + c$ ist.

52. Stellen Sie die Gleichungen der Tangentialebenen für die Flächen

    a) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ im Punkt $P_0(1, 3, z_0)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$;

    b) $xyz = 8$ im Punkt $P_0(1, 2, 4)$;

    c) $x^3 + 2y - \ln z = 3$ im Punkt $P_0(1, 1, z_0)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$ auf!

    Geben Sie jeweils die Gleichungen der Normalen an!

53. Bilden Sie die totalen Differentiale von

    a) $z = 2\arctan(y/x)$, b) $z = \ln \dfrac{e^{y+3x}}{(1 + x^2 + y^2)^3}$, c) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$!

54. Man ermittle die totalen Differentiale erster Ordnung von:

    a) $z = \sin(x^2 + y^2)$ b) $z = \sqrt{x - y} + \ln \sqrt{xy}$.

55. Prüfen Sie, ob die Gleichungen totale Differentiale darstellen!
    Hinweis: *Totale (bzw. vollständige) Differentiale* sind *exakte Differentialgleichungen*, deren implizite Lösungen Sie später noch kennen lernen werden!

    a) $(2x + 2xy^4)dx + (4y^3x^2 + 3y^2)dy = 0$, b) $x \sin y \, dx + x^2 \cos y \, dy = 0$

    c) $\left(2xy - \dfrac{1}{y^2}\right) dx + \left(x^2 + \dfrac{2x}{y^3} + \dfrac{y}{y^2 + 1}\right) dy$ d) $2ydx - 2xdy = 0$

    e) Hoffentlich haben Sie in d) erhalten, dass es sich bei dem Ausdruck $2ydx - 2xdy$ um kein totales Differential handelt. Versuchen Sie es nun mit $(\, 2ydx - 2xdy \,)\,(x + y)^{-2} = 0$.

Sie merken, dass der Ausdruck in d), multipliziert mit dem *integrierenden Faktor* $\lambda(x,y) = (x+y)^{-2}$, eine vollständiges Differential ergibt.

f) $\left(2xy + 3x^2 + \frac{y}{1+xy}\right) dx + \left(x^2 + 2y + 4 + \frac{x}{1+xy}\right) dy\,.$

56. Zur Bestimmung der Brennweite f eines Kugelspiegels werden Gegenstandsweite $a = (12 \pm 0.1)$ cm und Bildweite $b = (5 \pm 0.05)$ cm gemessen. Welcher absolute und welcher relative Fehler ergibt sich für die Brennweite?
Es gilt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

57. Mit welchem absoluten und relativen Fehler muss man bei der Ermittlung des Volumens V eines geraden Kegelstumpfes rechnen, wenn der Grundkreisradius $R = 5$ cm, der Deckkreisradius $r = 4$ cm und die Höhe des Kegelstupfes $h = 6$ cm gemessen und alle Größen mit einem absoluten Fehler von höchstens 0.1 cm abgelesen wurden. **Hinweis:** $V = h\,\pi\,(R^2 + R\,r + r^2)\,/\,3$

58. Man bestimme die relativen Extrema von

a) $z = 2xy(x+y-6)$ b) $z = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$

c) $u = e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$ d) $z = f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$!

59. Bestimmen Sie die absoluten Extrema über dem gegebenen Bereich:

a) $f(x,y) = x \cdot y - y^2$ über dem Quadrat $0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1\,.$

b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ über dem Kreisring mit $x^2 + y^2 = 0.5\,,\ x^2 + y^2 = 2\,.$

60. Man bestimme den kürzesten Abstand des Punktes $P_0(2\,,\,2\sqrt{7}\,,\,0.5)$ vom Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$.

61. Gegeben sind die fünf Meßwertpaare

$$(1\,,\,3.1), (2\,,\,1.4), (3\,,\,1.3), (4\,,\,1.15), (5\,,\,1.05)\ .$$

Man ermittle mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die Ausgleichsfunktion $f(x) = a\,x^{-2} + b$.

62. Für eine Kennziffer seien die in der Tabelle gegebenen Werte bekannt:

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Wert der Kennziffer	4305	4421	4539	4662	4785	4906	5018

Man betrachtet eine lineare Trendfunktion $f(x) = a + b\,x$. Ermitteln Sie die Parameter a und b! Welche Werte der Kennziffer sind danach für 2007 und 2008 zu erwarten?