

Aufgaben zur Vorlesung Mathematik II für Ingenieure, SoSe07
(3. Serie, Funktionen mehrerer Variabler, Gradient, Rotation, Divergenz)

38. Man bestimme und skizziere den größtmöglichen Definitionsbereich folgender Funktionen:

a) $z = \sqrt{4x + y} + \sqrt{4x - y}$, b) $z = \ln(x^2 + y - 1)$,
c) $z = \frac{2}{\sqrt{\ln(5 - x^2 - y^2)}}$, d) $z = \arcsin(5 - 2y + 2x)$,
e) $z = \ln[2x \ln(y - x)]$.

39. Skizzieren Sie die durch Hauptschnitte entstehenden Kurven für die Flächen:

a) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, b) $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$,
c) $z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$, d) $z = xe^y$.

40. Skizzieren Sie von den folgenden Funktionen einige Höhenlinien

a) $z = 2x + y$, b) $z = y(1 + x^2)$ bzw. c) $z = (4 - x^2)e^y$.

41. Welche Flächen 2. Ordnung sind durch folgende Gleichungen gegeben?

a) $9x^2 + 4y^2 = 36$, b) $z^2 - 4x^2 + y^2 = 1$,
c) $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$, d) $y^2 = x^2 + z^2$,
e) $16z = 4x^2 + y^2$, f) $x^2 = 4y$.

42. Wie lautet die Gleichung der Fläche, die entsteht, wenn die Kurve mit der Gleichung $z = \ln x$ um die z -Achse rotiert?

43. Berechnen Sie: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2ye^{4x} - xe^{2y}}{3x + 2y} \right)$,

b) $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ye^{4x} - xe^{2y}}{3x + 2y} \right)$ und c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{\sqrt{xy + 16} - 4}{2xy}$!

44. Für die folgenden Funktionen sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung allgemein und an der Stelle (x_0, y_0) zu ermitteln. Man bestimme jeweils den Gradienten $\nabla z(x_0, y_0)$ in (x_0, y_0) .

a) $z = x^2 + 2y^2$; $(x_0, y_0) = (2, 1)$, b) $z = \ln \frac{2x + 4y}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$; $(1, 1)$,
c) $z = 2y + xe^{2xy}$; $(1, 0)$, d) $z = \arctan \frac{y}{2x}$; $(1, 2)$,
e) $z = 3x^y + y^x + 4$; $(1, 1)$.

Einige Bemerkungen zur Vektoranalysis:

Es seien $f(x, y, z)$ eine skalare Funktion und $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ ein (dreidimensionales) Vektorfeld jeweils der drei Variablen x, y, z .

a) $\text{grad } f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right)$
definiert ein Vektorfeld, das Gradientenfeld (∇ ist der *Nabla*-Operator).

b) Der *Laplace*-Operator Δ einer skalaren Funktion $f(x, y, z)$ ist wieder ein Skalar (Summe der 2. partiellen Ableitungen):

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2}.$$

c) Die *Divergenz* eines Vektorfeldes $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ist eine skalare Funktion und definiert die *Quelldichte* des Vektorfeldes \mathbf{F} (Summe der 1. partiellen Ableitungen der Komponenten von \mathbf{F}):

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z}.$$

d) Die *Rotation* eines Vektorfeldes $\mathbf{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ ist ein Vektorfeld, $\text{rot } \mathbf{F}$ erklärt die *Wirbeldichte* im Vektorfeld \mathbf{F} :

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Beachte: $\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ mit formal $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Die Rotation $\text{rot } \mathbf{F}$ eines Vektorfeldes ist nur in \mathbb{R}^3 erklärt. Der Gradient $\text{grad } f = \nabla f$ und der Laplace-Operator Δf für eine skalare Funktion f sowie die Divergenz $\text{div } \mathbf{F}$ eines Vektorfeldes \mathbf{F} sind für beliebig viele Variable definiert.

45. Es sei $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = (ze^{2x}, xe^{-y}, zy^2)^T$ ein Vektorfeld. Man bestimme $\text{rot } \mathbf{F}$, $\text{div } \mathbf{F}$ und $\text{grad } (\text{div } \mathbf{F})$.

46. Gegeben sind die Skalarfunktion $U(x, y, z) = x^2y + yz + 2xz^2$ und das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^{-y}, zy^2, ze^{2x})$. Ermitteln Sie:

- a) $\text{grad } U$, b) $\text{div } \mathbf{F}$, c) $\text{rot } \mathbf{F}$,
d) $\text{div } (\text{grad } U)$, e) $\text{div } (\text{rot } \mathbf{F})$, f) $\text{rot } (\text{grad } U)$.

47. Ist das Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (x^2 - y^2, z^2 - xy, -xz)$ quellenfrei?

48. Gegeben sind das Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (x^2, -yz^2/x, xz)$ und das Skalarfeld $U(x, y, z) = 4x^2 + 6y^2 + z^2$. Berechnen Sie für den Punkt $A = (1, -2, 4)$ die Komponente des Vektorfeldes $\text{rot } \mathbf{v}$ in Richtung des größten Anstieges der Ortsfunktion $U(x, y, z)$!