Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Gerd Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik III, WS 2007

Serie 4 (Differenzialgleichungen, 1. Teil)

38. Prüfen Sie, ob die Funktionen $y = Cx^2 - \frac{1}{4}(\ln x^2 + 1)$ die DGL $xy' - 2y = \ln x$ erfüllen.
    Bestimmen Sie C derart, dass die Bedingung $y(1) = 0$ erfüllt ist.

39. Zeichnen Sie das Bild der Schar aller Kreise $x^2 + y^2 = 2ax$ und stellen Sie die zugehörige Differentialgleichung auf.

40. Skizzieren Sie das Bild der Richtungsfelder mit einigen Lösungskurven für folgende Differentialgleichung: $y' = y - 1$ und bestimmen Sie deren allgemeine Lösung.

41. Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen DGLen:
    a) $y' + 6x^5 y = x^5$
    b) $y' - ay = e^{mx}$ (Fallunterscheidungen für $m = a$ und $m \neq a$)

42. Gegeben ist die DGL $(x + 1)y' + 2y = 3(x + 1)$. Bestimmen Sie die Integralkurve, die durch den Punkt $P_0(1, 1)$ geht und skizzieren Sie diese !
    Geben Sie die Gleichung der Tangente für $x_0 = 1$ an.

43. Lösen Sie die Bernoullische DGL $y' - xy + y^3 e^{-x^2} = 0$.

44. Man zeige, dass folgende DGL in der Form $y' = f(\frac{y}{x})$ (Ähnlichkeits-DGL) angebbar ist und lösen Sie diese: $x^2 y' - y^2 + 6x^2 = 0$.

45. Man löse die Differentialgleichung $y' = (x + y)^2$.
    Hinweis. Nach sinnvollem Substituieren sollten sich die Variablen trennen lassen.

46. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung von:

    a) $y'' - 4y' + 3y = 0$
    b) $y'' - 6y' + 13y = 0$
    c) $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$
    d) $y^{(4)} - 8y'' - 9y = 0$

47. Eine charakterisitische Gleichung besitzt die Lösungen $\lambda_{1/2} = \pm 1$ und $\lambda_{3/4} = -2 \pm 3i$. Wie lautet die zugehörige homogene DGL 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten?

48. Welcher Differentialgleichung genügen die gedämpften Schwingungen $y = f(t) = Ae^{-2t}\sin(t+\beta)$ mit den Parametern A und β ?

49. a) Man bestimme die allgemeine Lösung der Dgl.

$$y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0$$

b) Man ermittle die Wronskische Determinante der drei die Lösung bildenden Funktionen und zeige, dass diese linear unabhängig sind.

c) Wie lautet die spezielle Lösung, die die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = 1$ erfüllt? Skizzieren Sie die Bildkurve dieser speziellen Lösung!

50. Gegeben sei die inhomogene DGL

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = s(x)\,.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL. Welche speziellen Ansätze sind zur Ermittlung einer partikulären Lösung geeignet bei folgenden Störfunktionen $s(x)$:

a) $s(x) = 4x - 2x^3$ b) $s(x) = (3x+2)e^{-x}$

c) $s(x) = 4x - e^{-3x}$ d) $s(x) = x^2 e^{-3x}$

e) $s(x) = 2e^x + \cos x$ f) $s(x) = -xe^x$

51. Aus der allgemeinen Lösung der Gleichung

$$y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$$

ist diejenige Integralkurve zu ermitteln, die durch den Punkt $P_0(0;2)$ geht und dort die Tangente $2x - y + 2 = 0$ hat.

52. (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem :

$$y'' + y' = 4\sin x + 2\cos x \qquad y(\tfrac{\pi}{2}) = 0\ ;\ y'(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

(b) Lösen Sie das Randwertproblem:

$$y'' + 4y = 2x \qquad y(0) = 0\ ;\ y(\tfrac{\pi}{4}) = 0$$

(c) Wie lautet die Gleichung des Lösungsgraphen von $y'' + 2y' + y = \sin x$ der mit der Steigung $m = \frac{1}{2}$ durch den Ursprung verläuft.

(d) Lösen Sie die Randwertaufgabe:
$\ddot{x}(t) + x(t) = 9\cos 2t\ ;\ x(0) = 1\ ;\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$!

53. Gesucht sind die allgemeinen Lösungen von:

a) $y'' - 4y' + 4y = 12xe^{2x}$

b) $2y'' + 8y - x = \cos 2x$

c) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1\,.$