Fakultät für Mathematik, Prof. Dr. G. Christoph 16.09.2008

3. Wiederholungsklausur Mathematik I/II für Ingenieure

für die Studiengänge BSYT, CPG, MB, MTK, MSPG, UEPT und VT mit Hinweisen und Ergebnissen zur Selbstkontrolle

1. (**2+3 Punkte**) (Hinweis: Die Teile a) und b) sind unabhängige Aufgaben.)
   a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \dfrac{2+5i}{(3-i)^2 - 2i}$!

   b) Ermitteln Sie alle Lösungen z der Gleichung $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$ und stellen Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene dar!

   <u>Hinweise und Ergebnisse:</u>

   a) $\operatorname{Re} z = -3/16\,,\ \operatorname{Im} z = 7/16.$
   b) $z_1 = 1, z_2 = -1\,,\ z_3 = \sqrt{5}\,i\,,\ z_4 = -\sqrt{5}\,i$

2. (**7 Punkte**) Man entscheide, für welche Werte von c das Gleichungssystem

   $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & cz & = & 1 \\ -2x & + & cy & + & 7z & = & 4 \end{array}$$

   α)keine Lösung,
   β)genau eine Lösung,
   γ)unendlich viele Lösungen besitzt.

   δ) Geben Sie im Falle γ) die nichttrivialen Lösungen an!

   <u>Hinweise und Ergebnisse:</u> Mit Gauß-Schema, letzte Zeile sollte $0, 0, 9 - c^2 | 3 - c$ sein, daraus folgt:
   α) für $c = -3$ keine Lösung,
   β)$c \neq \pm 3$ genau eine Lösung,
   γ) für $c = 3$ unendlich viele Lösungen.
   δ) Für $c = 3$ gilt $(x, y, z)^T = (-1/2, 1, 0)^T + t(1/2, -2, 1)^T$

3. (**4 Punkte**) Vom Punkt $P_0 = (1, 2, 1)$ wird auf das Lot die Ebene $E:\ x - 2y + z = 10$ gefällt. Man ermittle den Durchstoßpunkt des Lotes in der Ebene E und bestimme den Abstand des Punktes P_0 von der gegebenen Ebene.

   <u>Hinweise und Ergebnisse:</u> Parameterform der Geraden $\overline{r} = \overline{OP_0} + \overline{n}\,t$ in Ebene einsehen, wobei $\overline{n} = (1, -2, 1)$ ist, und $t = 2$ finden.
   Durchstoßpunkt ist $(3, -2, 3)$, Abstand $D = \sqrt{24}$

4. (**1+6+2 Punkte**) Gegeben sei die Matrix

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & a \end{bmatrix} \quad !$$

α) Für welche rellen Werte a besitzt die Matrix A keine Inverse?
β) Lösen Sie für $a = -2$ die Eigenwertaufgabe $Ax = \lambda x$ und geben Sie für den größten Eigenwert den zugehörigen Eigenvektor an!
(Hinweis: Falls Sie die Eigenwerte nicht berechnen konnten, berechnen Sie den Eigenvektor zu $\lambda = 1$.)
γ) Für $a = 1$ berechne man A^{-1}.

Hinweise und Ergebnisse: α) Für $a = -4/3$ gilt $|A| = 0$, keine Inverse.
β) $|A - \lambda E| = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = -1\,,\ \lambda_3 = 2$. $\overline{x}_{(2)} = (0, 4, 1)$.
γ) $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. (**2+2 Punkte**) Bestimmen Sie die erste Ableitung von

$$f(x) = \sqrt{e^{x^2+3} + \cos(2x)} \quad \text{sowie} \quad g(x) = (1 + \sin x\,)^{2/x}.$$

Hinweise und Ergebnisse:

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2+3} - 2\sin(2x)}{2\sqrt{e^{x^2+3} + \cos(2x)}}$$

$$g'(x) = (1 + \sin x)^{2/x} \left(\frac{\dfrac{2x\cos x}{1 + \sin x} - 2\ln(1 + \sin x)}{x^2} \right)$$

6. (**2+2 Punkte**) Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \to +0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \to +0} (1 + \sin x\,)^{2/x}.$$

Hinweise und Ergebnisse: $1/2$ bzw. e^2.

7. (**7+2 Punkte**) Gegeben sei die Funktion

$$z = 3\,x^2 - 3\,x^2\,y - 12\,y^2 + 36\,y + 4 = 0\,.$$

a) Man berechne die relativen Extrema bzw. Sattelpunkte der Funktion $z = f(x, y)$.
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene zur oben gegebenen Oberfläche $z = f(x, y)$ im Berührungspunkt $P_0 = (\,1, -1,\ f(\,1, -1))$!

Hinweise und Ergebnisse:

a) $z_x = 0, z_y = 0$, daraus folgt $(0, 3/2), (\pm\sqrt{8}, 1)$ kritisch.
$(0, 3/2)$ Max-Punkt, $(\pm\sqrt{8}, 1)$ Sattelpunkte

b) $z_T = -38 + 12(x - 1) + 57(y + 1)$.