Fakultät für Mathematik 15.09.2008
Prof. Dr. G. Christoph , Prof. Dr. G. Warnecke

Klausur Mathematik III/VI für Ingenieure
für die Studiengänge BSYT, CPG, MB, MTK, MSPG, UEPT und VT
mit Hinweisen und Ergebnissen zur Selbstkontrolle

Zugelassene Hilfsmittel: Zwei A4-Blätter handgeschriebene Nachschriften, Taschenrechner, Blatt mit Grundintegralen, Normalverteilungstabelle.

Hinweise: Gewertet werden nur Lösungen, deren Rechengang logisch nachvollziehbar ist.

Mathematik III für Ingenieure , Aufgaben 1 - 4:

1. (3+3+3) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\text{a)} \quad \int_1^2 \mathrm{x}^5 \sqrt{\mathrm{x}^3 - 1}\,\mathrm{dx}\ , \qquad \text{b)} \quad \int_0^4 |\,\mathrm{x}^2 - 4\,|\,\mathrm{dx}\,, \qquad \text{c)} \quad \int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{\mathrm{y}}}\,\mathrm{dy}\,.$$

Hinweise und Ergebnisse:

a) $u = x^3 - 1\,,\ du = 3x^2, x^3 = u + 1$, erst alles ersetzen, dann integrieren, $I_a = 57 \cdot 7^{3/2}$.

b) $I_b = \int\limits_0^2 (4 - x^2)\,dx + \int\limits_2^4 (x^2 - 4)\,dx = 16$

c) $\sqrt{y} = u\,,\ y = u^2\,,\ 2u\,du$, partielle Integration, $I_c = 2(e^2 + 1)$.

2. (7 Punkte)
Der homogene Körper K wird von den Flächen $z = x^2 + y^2$ und $z = 9$ eingeschlossen. Skizzieren Sie K in kartesischen Koordinaten. Berechnen Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten das statische Moment M_{xy} des Körpers K bezüglich der xy-Ebene:

$$M_{xy} = \iiint\limits_K z\,dx\,dy\,dz\,.$$

Hinweise und Ergebnis: $0 \le \varphi \le 2\pi\ ,\ 0 \le r \le 3\ ,\ r^2 \le z \le 9$ oder $0 \le \varphi \le 2\pi\ ,\ 0 \le z \le 9\ ,\ 0 \le r \le \sqrt{z}$.
$z = x^2 + y^2 = r^2$ gilt nur auf der Oberfläche, Ergebnis $M_{xy} = 243\pi$.

3. (3 + 4 Punkte) Ein Massepunkt wird in einem zweidimensionalen Kraftfeld

$$\overline{F(x,y)} = (F_1(x,y)\,,\, F_2(x,y)) \;=\; (\,a\,x\,y^2\,,\, y\,x^2\;+\;2\,y)\,, \quad a \in (-\infty\,,\,\infty),$$

entlang der Parabel $\omega : y = 2x^2, \quad 0 \le x \le 2,$ transportiert.

a) Für $a = 2$ berechne man die Arbeit $\int\limits_{\omega} \overline{F} d\overline{r} = \int\limits_{\omega} (F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy)$.

b) Begründen Sie, warum für den Wert $a = 1$ obiges Kurvenintegral vom Weg ω unabhängig ist! Für $a = 1$ bestimme man die Potentialfunktion $U(x,y)$ zum Kraftfeld $\overline{F(x,y)}$.

Hinweis: $U(x,y)$ ist Potentialfunktion des Kraftfeldes $\overline{F(x,y)}$, falls $\overline{F(x,y)} = -\,\mathbf{grad}\,U(x,y)$.

Hinweise und Ergebnisse:

a) $x = t\,,\; dx = dt\,,\; y = 2t^2\,,\; dy = 4tdt$ überall ersetzen. Ergebnis 704/3.

b) $a = 1$, wegunabhängig, da $F_{1y} = F_{2x}$.

c) $u(x,y) = -\dfrac{x^2y^2}{2} - y^2 + c$

4. (7 Punkte)
Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Diffentialgleichung

$$y'' + 2y' = 20\,x + 14 + 5\cos\,x\,.$$

Hinweise und Ergebnis: $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$ Lösungen des charakteristischen Polynoms. Ansatz partikuläre Lösung:
$y_p = (Ax + B)x + C\cos x + D\sin x$, da für $\lambda = 0$ Resonanz,
Allgemeine Lösung: $y = C_1 + C_2\,e^{-2x} + 5x^2 + 2x - \cos x + 2\sin x$

Stochastik für Ingenieure, Aufgaben 5 - 8:

5) (Punkte)

5) (5 Punkte) In einem Behälter liegen 10 Maschinenteile, davon sind 4 nicht normgerecht. Ohne Zurücklegen werden zufällig nacheinander jeweils ein Maschinenteil entnommen. Das Ereignis A_i bedeutet, dass das i-te ausgewählte Stück normgerecht ist $(i = 1, 2)$. Berechnen Sie

a) $P(A_2)$, b) $P(A_2 \cup A_1)$ c) Sind die Ereignisse A_1 und A_2 unabhängig?

Hinweise und Ergebnisse:

a) $P(A_1) = P(A_2) = 6/10$

b) $P(A_2 \cup A_1) = 78/90$

c) nicht unabhängig, da $P(A_2 \cap A_1) = 1/3 \neq P(A_1) \cdot P(A_2) = 0.36$

6) (7 Punkte) Gegeben ist die Dichtefunktion einer Zufallsgröße X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}\,(x^2 - 1) & \text{für} \quad 1 < x \leq 4 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 1 \quad \text{oder} \quad x > 4 \end{cases} .$$

Berechnen und skizzieren Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F_X(t)$, die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 3)$, $P(X = 2)$, die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X > 2 |\, X \leq 3)$ sowie den Erwartungswert $E(X)$.

Hinweise und Ergebnisse:

$$F_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f_X(t), dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \leq 1 \\ \frac{1}{18}\,(\frac{t^3}{3} - t + \frac{2}{3}) & \text{für} \quad 1 < t \leq 4 \\ 1 & \text{für} \quad t > 4 \end{cases} .$$

$F_X(t)$ ist stetige, monoton wachsende Funktion, keine Sprungfunktion.

$P(X \leq 3) = F_X(3) = 10/27$, $P(X = 2) = 0$, da X stetige ZG.
$P(X > 2|X \leq 3) = 4/5\,,\; E(X) = 25/8 = 3.125.$

7) (Punkte) Ein Werkstück soll eine Bohrung von 50 mm Durchmesser erhalten. Es ist bekannt, dass der Durchmesser Y der vom Bohrautomaten erzeuten Bohrungen eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 50$ mm und $\sigma = 0.02$ mm ist. Der Toleranzbereich der Bohrungen in mm sei $[49.97\ ,\ 50.04]$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bohrung innerhalb des Toleranzbereiches liegt?

b1) Durch Änderungen am Automaten wird die Standardabweichung verändert, während μ sich nicht ändert. Wie groß darf die neue Standardabweichung σ^* sein, damit nur 1% der Bohrungen einen Durchmesser Y^* größer als 50.04 mm haben.

b2) Nach der Verbesserung des Automaten werden 5 Bohrungen überprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass davon höchstens eine Bohrung einen zu großen Durchmesser hat.

Hinweise und Ergebnisse:
a) $Y \sim N(50, 0.02^2)\,,\; P(49.97 \leq Y \leq 50.04) = 0.9104.$
b1) $Y^* \sim N(50, \sigma_*^2)\,,\; \sigma_* = \dfrac{0,04}{2,33} = 0.0172.$
b2) $S_5 \sim Bi(5, 0.01),\; P(S_5 \leq 1) = P(S_5 = 0) + P(S_5 = 1) = 0.999.$

8) (7 Punkte) Ein Fähre hat 190 Autostellplätze, die im Voraus zu reservieren sind. Erfahrungsgemäß nutzen aber 20% der Besteller unabhängig voneinander ihre Reservierung nicht.

Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace (mit Stetigkeitskorrektur)

a) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 225 Reservierung mehr als 190 Autos die Fähre benutzen wollen.

b) Wie groß darf die Anzahl der Buchungen höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 alle Autos einen Platz auf der Fähre finden?

<u>Hinweise und Ergebnisse:</u>

a) $S_{225} \sim Bi(225, 0.8)\,,\ P(S_{225} > 190) = 0.0401.$

b) $0.99 = P(S_n \leq 190) \approx \Phi\left(\dfrac{190.5 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right)\,,\ \Phi(2.33) = 0.99,$

$\dfrac{190.5 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}} = 2.33$, mit $\sqrt{n} = u$ quadratische Gleichung lösen,

$n = 220,88$ also 220 Buchungen.