Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Klausur im Fach Mathematik I/II

für die Studiengänge MB, MTK, VT, EGT

Es werden nur Aufgaben gewertet, deren Lösungsweg vollständig nachvollziehbar ist. Erlaubt sind Taschenrechner und ein A4-Blatt mit Formeln und/oder Hinweisen.

1. Man entscheide für welche Werte a und b das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & bz & = & 1 \\ x & + & by & + & 3z & = & 2a \\ x & + & y & + & 2z & = & a \end{array}$$

   α) keine Lösung,
   β) unendlich viele Lösungen besitzt.
   Geben Sie im Fall β) alle Lösungen an!

2. a) Vereinfachen Sie!

$$z = \frac{(5+i)\cdot(2-3i)-2(4-5i)}{4-(1+i)^2}$$

   b) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und z_1/z_2, wenn $z_1 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$ und $z_2 = e^{-3\pi i}$.
   Stellen Sie $z_1, z_2, z_1 \cdot z_2$ und z_1/z_2 in der Gaußschen Zahlenebene dar!

3. Lösen Sie die Matrizengleichung

$$AX + 2B = C^T + 3X$$

   mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

   (Welche Form muss die Matrix X besitzen, damit diese Matrizengleichung lösbar ist?) Von der Matrix A bestimme man die Eigenwerte und zum größten Eigenwert den Eigenvektor.

4. **(10 Punkte)** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1.2 \cdot e^{-0.5x}$

   a) Bestimmen Sie Nullstellen, Extrema und Wendepunkte von $h(x) = x \cdot f(x)$.

   b) Zeichnen Sie den Graph von h für $-1 \leq x \leq 6$ (Skizze).

   c) $P(2, 0)$ sei der linke untere Eckpunkt eines achsenparallelen Rechtecks. Der rechte obere Eckpunkt S liege auf dem Graph von f. Wie muss S gewählt werden, damit der Inhalt des Rechtecks maximal wird?

5. **(12 Punkte)**

   a) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{a(x-1)} - e^{b(x-1)}}{\ln x}$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{4}{x}\right)^{2+2x}$.

   b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von $f(x) = (1 + x^2)^{2x}$.

   c) Berechnen Sie die Integrale $\int\limits_1^\infty \dfrac{3x}{(x^2+1)^2}\, dx$ und $\int\limits_1^2 x \ln x dx$.

6. **(8 Punkte)** Gegeben sei die Kurve $x(t) = 2 \tan t, y(t) = 9 \cos^2 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

   a) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve im Punkt $\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right), y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

ZA: **(8 Punkte)** Die Stromstärke I in einem Stromkreis mit dem Widerstand R, der Selbstinduktion L und der elektromotorischen Kraft E genügt der Differentialgleichung $L\dfrac{dI}{dt} + RI = E$.

   a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung, indem Sie R, L und E als konstante Größen betrachten.

   b) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $I(0) = 0$.