Fakultät für Mathematik 22.03.2005
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Name: .... Studiengang: ....
Mat.-Nr.: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Zu	Summe	Note
Punkte (Soll)	7	10	7	7	8	5	4	44 (+4)	-
Punkte (Ist)									

Zulassungsklausur Mathematik I für Ingenieure (180 min)

Zugelassene Hilfsmittel: 1 A4-Blatt handgeschriebene Nachschriften, Taschenrechner.
Hinweise: Gewertet werden nur Lösungen, deren Rechengang logisch nachvollziehbar ist.
Oben auf das Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt Name und Studiengang schreiben.
Bitte am Ende der Klausur das Aufgabenblatt in der Mitte falten und legen Sie Ihre Lösungsblätter in das gefaltete Aufgabenblatt. Alternativ kann auch das Aufgabenblatt mit den Lösungsblättern zusammengeheftet werden.
Sie bekommen nach der Korrektur Aufgabenblatt und Ihre Lösungen zurück.
Die Noten 1 bis 4 bedeuten Zulassung erworben, bei Note 5 gibt es den Übungsschein Mathematik I nicht.

1. (5+2 Punkte) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2 & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & + & 2x_3 & + & b & = & 0 \end{array}$$

   a) Für welche Werte a und b besitzt das System
      - genau eine Lösung
      - keine Lösung
      - unendlich viele Lösungen?

   b) Lösen Sie das System für $a = 1$ und $b = 4$.

2. (4+3+3 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.
   b) Geben Sie zum größten Eigenwert den Eigenvektor an!
   c) Ermitteln Sie A^{-1}, falls die Inverse existiert!

3. (3+ 4 Punkte) a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von

$$z = \frac{(5+i)\cdot(2-3i) - 2(4-5i)}{4-(1+i)^2}\,.$$

b) Gegeben seien $z_1 = 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ und $z_2 = e^{-(\pi/4)i}$.
Berechnen Sie $z_3 = z_1 \cdot z_2$ und $z_4 = z_1/z_2$ und stellen Sie z_1, z_2, z_3 und z_4 in der Gaußschen Zahlenebene dar!

4. (7 Punkte) Gegeben sei die Matrizengleichung

$$AX + 2B = C^T + 3X$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\,, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\,, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\,.$$

Welche Form muss die Matrix X besitzen, damit diese Matrizengleichung lösbar ist? Lösen Sie die Matizengleichung.

5. (2+3+3 Punkte)
a) Man zeige, dass für 2 Vektoren $\vec{a}\,,\ \vec{b}$ gilt

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2\ .$$

b) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten

$P_1(2,9,6), \quad P_2(3,2,1), \quad P_3(4,3,2)$?

c) Zerlegen Sie den Vektor $\vec{F} = (7,-7,12)$ in drei Komponenten, die parallel zu $\vec{a} = (1,-2,3)$, $\vec{b} = (2,3,1)$ und $\vec{c} = (3,1,2)$ verlaufen !

6. (5 Punkte) Vom Punkt $P_0 = (1,2,1)$ wird auf die Ebene $x - 2y + z - 4 = 0$ das Lot gefällt. Man ermittle den Durchstoßpunkt des Lotes.

Zusatzaufgabe (4 Punkte) Für folgende in Polarkoordinaten gegebene Menge B gebe man in einem kartesischen Koordinatensystem eine implizite Darstellung an und skizziere sie:

$B = \left\{(r,\varphi) \in I\!R^2 : 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le 2\sin\varphi\right\}.$