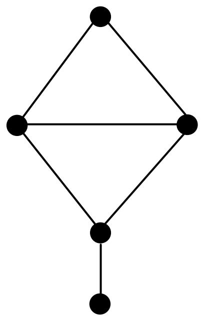
Graphentheorie im Mathematikunterricht

- Von Knoten, kürzesten Wegen und Gerüsten -

Dr. Brigitte Leneke

Sven Bramer, Nadine Herber, Berrit Lobach, Maik Osterland,
Christoph Schüle, Franziska Stephan, Julia Wehle, Catharina Wolf
(Studierende für das Lehramt an Gymnasien Mathematik)

Institut für Algebra und Geometrie, Fakultät für Mathematik
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Postfach 4120, 39016 Magdeburg
Germany



Inhaltsverzeichnis | **Seite**

1. Einleitung

In den letzten Jahren ist die Graphentheorie als wichtiges Teilgebiet der Diskreten Mathematik wohl zu Recht zur „Graphenwürde“ gelangt. Viele moderne Entwicklungen und Fragestellungen erfordern zunehmend mehr Methoden aus diesem Gebiet der Mathematik. Überall dort, wo netzartige Strukturen (Computernetze, Versorgungsnetze, Verkehrsnetze, wirtschaftliche Verflechtungsbeziehungen) zu analysieren und zu bearbeiten sind, finden „Graphen“ als Modelle Anwendung. Alltägliche Probleme, z. B. pünktliches Abfahren von Bahnen und Bussen, schnelles Herstellen von Telefon- und Internetverbindungen, Senken der Kosten für die Müllabfuhr, Finden einer möglichst kurzen Autoroute mit dem Routenplaner und vieles mehr können mit mathematischen Instrumentarien der Graphentheorie dargestellt und bearbeitet und gelöst werden. Schon diese Themen für sich genommen sind für die Schülerinnen und Schüler interessant und motivierend und die sich aus den Problemfeldern ergebenden Fragestellungen spontan verständlich. Aus ihrem eigenen Umfeld können die meisten Schülerinnen und Schüler weitere ähnliche Problemstellungen und Beispiele beschreiben, die dann im Unterricht bearbeitet werden können.
Für das Verständnis der Graphentheorie sind nur geringe Vorkenntnisse aus anderen Gebieten der Mathematik erforderlich. Die Schülerinnen und Schüler können auf einer sehr anschaulichen Basis Lösungsvorschläge machen, ohne dass viele Fachbegriffe notwendig sind. Das Spektrum der graphentheoretischen Lösungsmethoden ist so breit (Nutzung intuitiver, heuristischer und algorithmischer Verfahren), so dass Schülerinnen und Schüler aller Leistungsgruppen einen unbefangenen Zugang zu den Themen bekommen. Ein anwendungs- und problemorientierter Unterricht liegt mit diesem Themenfeld auf der Hand. Unmittelbar damit verbunden sind weitere Möglichkeiten der Kompetenzentwicklung bei den Schülerinnen und Schülern im mathematischen Modellieren, im Verwenden mathematischer Darstellungen sowie im Umgang mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik. Stark unterstützt wird die Entwicklung dieser Kompetenzen durch die Visualisierung und die anschauliche Darstellung der einzelnen Problemstellungen mit Hilfe graphentheoretischer Elemente.

2. Didaktisch-methodische Orientierung

Den Schülerinnen und Schülern werden einige typische Problem- und Fragestellungen der Graphentheorie auf der Grundlage bekannter Anwendungs- und Alltagssituationen nahe gebracht. Dabei soll gezeigt werden, wie die Mathematik und hier speziell die Graphentheorie eingesetzt werden kann, um **Strukturen** zu erkennen und **Denkmodelle** zu schaffen. Die **Modellbildung** steht also bei jeder Problemlösung im Mittelpunkt.
Um jedoch die erforderlichen Mittel für die Modellbildung zur Verfügung zu haben, werden zunächst in Verbindung mit den hervorragenden Visualisierungsmöglichkeiten einige notwendige **Begriffe** eingeführt. Diese Begriffe finden dann durch die Bearbeitung typischer graphentheoretischer Fragestellungen ausgehend von praktischen Problemstellungen Anwendung und werden gefestigt. Die dafür genutzten Lösungsverfahren haben sowohl algorithmischen als auch heuristischen Charakter.
Eine Weiterführung der Thematik ist dann unter mehreren Aspekten denkbar. Es kann z. B. gekoppelt an praktische Aufgabenstellungen weiter in das Begriffssystem der Graphentheorie eingedrungen werden, in dem u. a. spezielle Graphen untersucht werden oder auch weitere algorithmische oder heuristische Verfahren für die Pro-

blemlösungen genutzt werden. Dabei können Werkzeuge und Verfahren für die Untersuchung sowohl von Existenzproblemen als auch von Anzahl- bzw. Optimierungsproblemen (vgl. Abb.1) ausgewählt werden. So kann den Schülerinnen und Schülern u. a. am Beispiel des „Kürzesten – Wege – Problems “ dies über das Finden eines „Weges“ vom Ort A zum Ort B, über das Suchen nach weiteren Wegen bis zum „Herausfiltern“ des „besten“ Weges sehr anschaulich verdeutlicht werden.

Problemkreise	**Ziele des MU**
⇩	⇩
Existenzprobleme	Argumentieren, Begründen, Beweisen
Anzahlprobleme	Argumentieren, Kombinatorik
Optimierungsprobleme	Heuristisches und algorithmisches Arbeiten
	Begriffssystem aufbauen Experimentelles Arbeiten

⇩

Anwendungsorientierung

⇩

Modellierung

Abb. 1: Ziele des Mathematikunterrichts

Die Bearbeitung dieser drei Problemkreise ist auf unterschiedlichen Erkenntnisebenen möglich und von daher sowohl im Sekundarbereich I als natürlich vor allem im Sekundarbereich II möglich. So können die Schülerinnen und Schüler **spielerisch-experimentell** Rundreisen realisieren und gestalten, **intuitiv-heuristisch** die kürzeste Rundreise finden, aber z. B. auch **algorithmisch** „Gerüste“ auf Graphen konstruieren. Durch **entdeckendes Lernen** an **offenen** Aufgaben und durch **offene** Unterrichtsformen können die Schülerinnen und Schüler mit diesem Teilgebiet der Mathematik bekannt und vertraut gemacht werden. Dabei entdecken sie, dass es „leichte“ und „schwere“ Probleme gibt und vervollständigen so ihr Bild von der Mathematik. In **kooperativen** Unterrichtsformen ist es möglich, verschiedene Lösungsansätze (Modelle) zu diskutieren, Verfahren zu bewerten, Strategien zu entwickeln und weiterführende Frage- und Problemstellungen zu formulieren. Inner- und außermathematische Vernetzungen ergeben sich dabei wie von selbst.
Die unterrichtlichen Potenzen des Gebietes „Graphentheorie“ seien in folgenden Punkten zusammenfassend dargestellt:

a) zahlreiche Anwendungssituationen und Anwendungsbezüge
b) anschauliche Modelle (Visualisierung!)
c) Vernetzungen zu anderen Gebieten der Mathematik, des Mathematikunterrichts und anderer Unterrichtsfächer
d) Lösungsstrategien entwickeln, kennen lernen und festigen, z. B. Heuristiken (Rundreiseproblem) und Algorithmen (Minimalgerüstproblem)
e) Bild von Mathematik formen – „leichte“ und „schwere“ Probleme (Motivation!)
f) Offene Unterrichtsformen und Aufgabenstellungen

Auf der Basis grundlegender und tragender Begriffe können die Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeiten in wichtigen Arbeitsweisen und Arbeitstechniken weiterentwickeln (vgl. Abb. 2).

Begriffssystem aufbauen

⇩

Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler	
Entdeckendes Lernen	Umgang mit offenen Aufgaben
Experimentelles Arbeiten	Inner- und außermathematische Vernetzungen
Anwendungsorientierung	Methode der Aufgabenvariation
Modellierung	Kooperatives Arbeiten
Heuristisches Arbeiten	Visuelles Arbeiten
Algorithmisches Arbeiten	

Abb. 2

3. Zur Behandlung von Grundbegriffen

Die Einführung und Festigung von **grundlegenden** Begriffen der Graphentheorie sollte schrittweise anhand konkreter Frage- und Problemstellungen erfolgen. **Weniger ist hier sicher mehr!** Durch kleinere und übersichtliche Aufgaben können die Schülerinnen und Schüler mit Knoten, Kanten, gerichteten und ungerichteten Graphen, Wegen und Bäumen, Teilgraphen und Gerüsten …bekannt gemacht werden. Es ist maßgeblich von der Unterrichtssequenz abhängig, wie breit und tief der zur Verfügung stehende Begriffsapparat werden sollte. Die Palette ist groß!!

In einem ersten Teil einer Unterrichtssequenz könnte eine Konzentration auf die Einführung der Begriffe Graph, Knoten, Kanten und Wege erfolgen. Ausgangspunkt ist eine sehr anschauliche Situation, aus der heraus dann die Begriffe erarbeitet werden könnten.

Beispiel 1:

Stefan plant seinen Nachmittag. Er möchte zu Hause essen, seine Oma im Krankenhaus besuchen, im Park eine Runde Fußball mit seinen Freunden spielen und im Einkaufszentrum die neuste Ausgabe des Kicker kaufen. Er betrachtet den Stadtplan und fragt sich, wie er seinen Nachmittag am besten einteilen kann.

Abb. 3: Stadtplan

In der ersten Erarbeitungsphase werden die Begriffe „Graph“, „Knoten“ und „Kante“ erarbeitet. Dabei sollen anhand des Beispiels eines Straßennetzes einer Stadt und wesentlicher Institutionen (Schule, Einkaufszentrum, Stadtpark, Krankenhaus) die Äquivalente in der Graphentheorie gefunden werden. Der Stadtplan wird dabei als Folie präsentiert, während die Definitionen zu den Begriffen der Graphentheorie und eine schematische Zeichnung als Tafelbild angelegt werden.

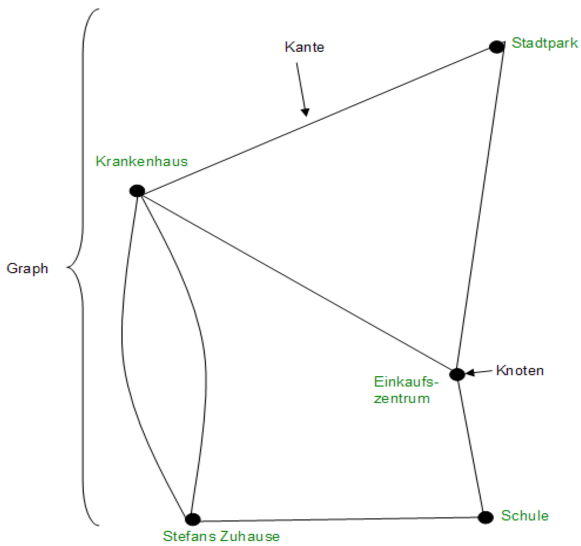


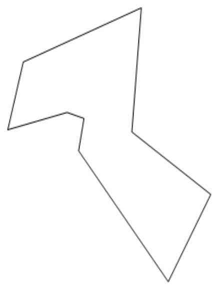
Abb. 4: Graph zum Beispiel 1

Es schließt sich eine erste Festigungsphase an, bei der die Vorstellungen über die Begriffe durch Visualisierung gefestigt werden sollen.

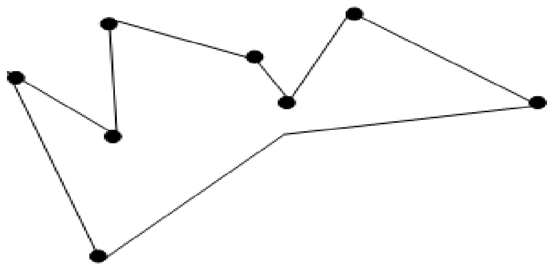
Übung 1

a) Entscheide, ob ein Graph vorliegt oder nicht.

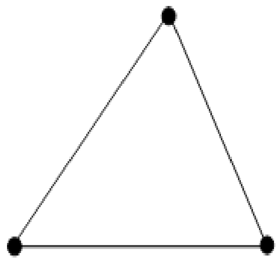
Graph 1



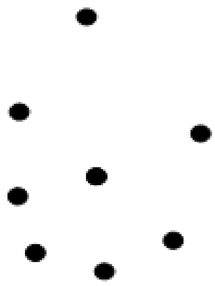
Graph 2



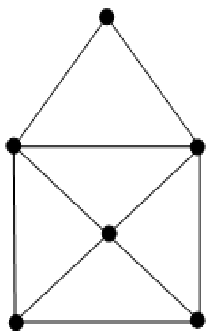
Graph 3



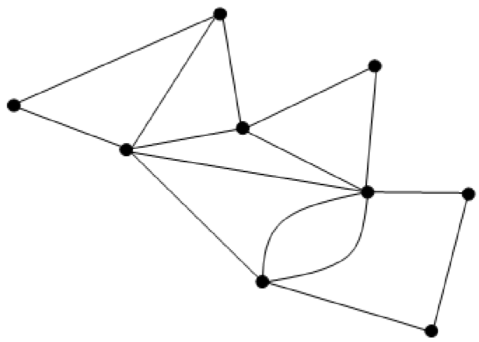
Graph 4



b) Wie viele Knoten und Kanten besitzt der Graph?



Graph 5



Graph 6

Der Übergang zu den **gerichteten** Graphen könnte ausgehend vom Beispiel 1 wieder anhand des Stadtplanes erfolgen, indem ein System von Einbahnstraßen eingefügt wird. Aus den ungerichteten Kanten werden gerichtete Kanten.

Beispiel 2:

Abb. 5: Stadtplan mit Einbahnstraßen

Werden die Kanten nun bewertet, führt dies zum Modell eines gerichteten **bewerteten Graphens** (vgl. Abb. 7).

Beispiel 3:

Stefan hat sich überlegt, seine Nachmittagsaktivitäten möglichst effektiv zu erreichen. Er startet von der Schule aus und möchte am Abend Zuhause ankommen. Nun sucht er nach der Variante, für die er die kürzeste Strecke zurücklegen muss.

Abb. 6: Stadtplan mit Entfernungsangaben

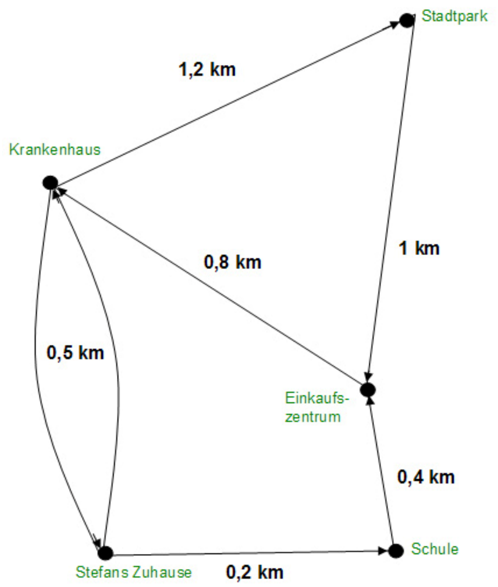


Abb. 7: Gewichteter gerichteter Graph

Anhand der angeführten Beispiele können die Schülerinnen und Schüler weitere Begriffe der Graphentheorie kennen lernen: **Wege, parallele Kanten, Kreis**. So wäre z. B. der Weg vom Krankenhaus zum Stadtpark, von dort aus zum Einkaufszentrum und dann zum Krankenhaus zurück in Abb. 6 ein **Kreis.**

Natürlich kommt bei der Suche nach dem **kürzesten Weg** sofort die Frage nach dem Verkehrsmittel ins Spiel. Wird die Strecke zu Fuß zurückgelegt, spielen Einbahnstraßen (gerichtete Kanten) keine Rolle (vgl. Abb.5), was natürlich bei Nutzung eines Fahrrades oder Autos ganz anders aussieht (vgl. Abb.6). Je nach Bedingungsgefüge erfolgt die Wahl des Modells (des Graphen). Hier ergeben sich unterrichtliche Möglichkeiten für kooperative Arbeitsformen (Gruppenarbeit).

Die Festigung der eingeführten Begriffe und die (anschauliche) Erörterung weiterer spezieller Graphen, Knoten und Kanten schließt auch die Möglichkeiten der Bezeichnungen in dem Modell „Graph" ein.
Eine abschließende Begriffsbeschreibung könnte unter diesem Aspekt wie folgt aussehen:

Definition: Ein Graph ist gegeben durch

- Knotenmenge $V = \{a, b, c, d\}$
- Kantenmenge $E = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$
- Abbildung $f: \quad V \rightarrow F$, wobei F die Menge aller 2-elementigen Teilmengen von V ist.

  $f(k_1) = \{a, b\} \quad f(k_2) = \{a, c\} \quad f(k_3) = \{c, d\} \quad f(k_4) = \{a, d\}$

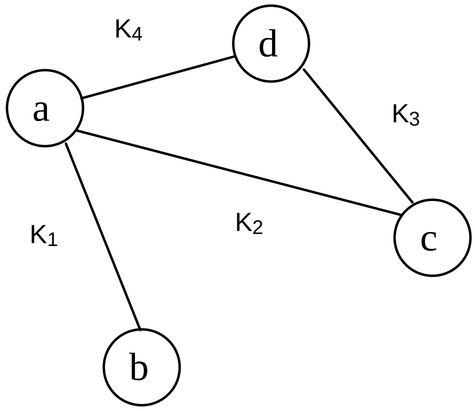


Abb. 8: Bewerteter ungerichteter Graph

In Graphen gibt es zwischen den Knoten **Wege**, die auch **geschlossen** sein können – also **Rundwege** sind.

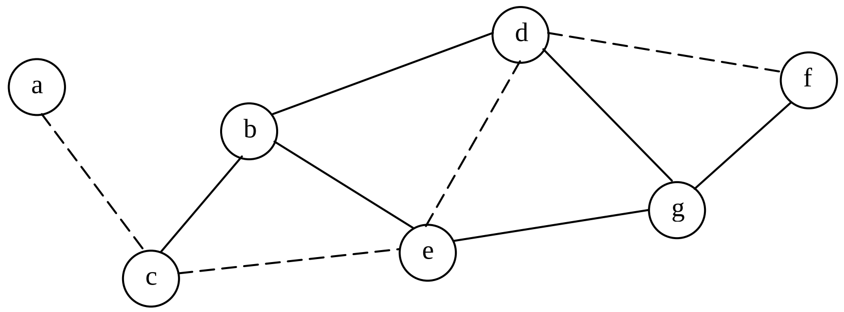


Abb. 9: Wege in einem ungerichteten Graphen

K = (a, c, e, d, f) ist ein **Weg** der Länge 4 vom Knoten a zum Knoten f. Kein Knoten kommt mehrfach vor.
L = (c, e, d, b, c) ist ein **Rundweg**.

In **kantengewichteten Graphen** ist die **Länge eines Weges** die Summe der Kantengewichte aller zugehörigen Kanten.

Ein ungerichteter Graph heißt **zusammenhängend**, falls es zu je zwei beliebigen Knoten v und w aus der Knotenmenge V einen (ungerichteten) **Weg** gibt, mit v als Startknoten und w als Endknoten.

In anschließenden Übungen werden die Begriffe gefestigt bzw. auch erweitert.

Beispiel 4:

Bestimme die Anzahl der möglichen Wege in den gegebenen Graphen.

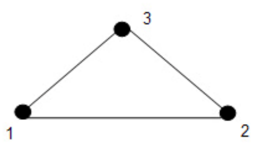


Abb. 10

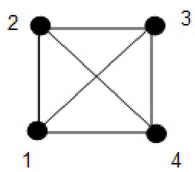


Abb. 11

Beispiel 5:

Finde mögliche Wege von der Quelle zu den Senken des Graphen. Bei welcher Möglichkeit werden die wenigsten Knoten durchlaufen?

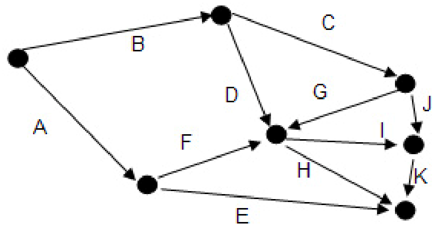


Abb. 12

Die Schülerinnen und Schüler können sich die „Knotenarten“ z. T. selbst aus der umgangssprachlichen Analogie erschließen. Quellen und Senken, isolierte Knoten und „benachbarte“ (adjazente) Knoten werden mittels kleiner „Bildchen“ beschrieben (vgl. Abb. 13).

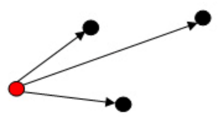
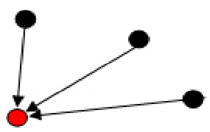
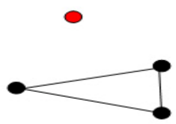
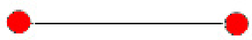
Quelle	Senke	Isolierter Knoten	Benachbarter Knoten
			

Abb. 13

4. Kürzeste Wege und Rundreisen

Die Suche nach kürzesten Wegen, nach Rundreisen und kürzesten Rundreisen in Graphen eröffnet im Unterricht die Möglichkeit, sowohl heuristische als auch algorithmische (wenn überhaupt möglich) Lösungsvarianten und –strategien einzubeziehen. In offenen Aufgabenstellungen tritt Offenheit auch bei der Wahl der Lösungsmethoden zu Tage.

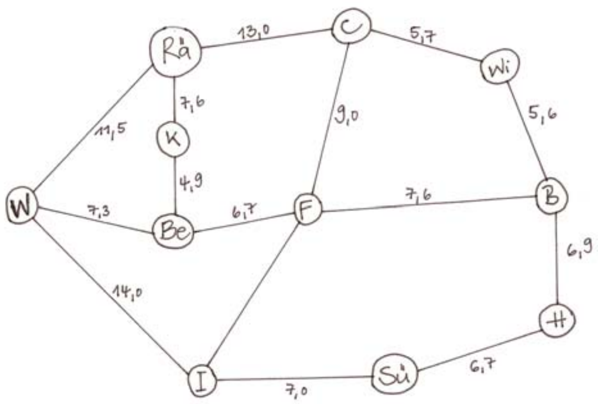
Beispiel 6:

a) Erstelle für deinen eigenen Wohnkreis einen Graphen mit mindestens fünf Knoten, die für die umliegenden Orte stehen.
b) Recherchiere die Entfernungen zwischen den Orten und bewerte die Kanten deines Graphen entsprechend.
c) Finde den jeweils kürzesten Weg von deinem Wohnort zu allen anderen Orten.

Will man die Aufgabenstellung nicht so ganz offen lassen, könnte das folgende Beispiel für die Schülerinnen und Schüler zumindest auch Anregung sein, durch entsprechende **Variationen** und die Einbindung regionaler Gegebenheiten eigene Aufgabenstellungen zu finden.

Beispiel 7:

Familie Muster aus Haldensleben möchte am Wochenende einen Ausflug nach Rätzlingen machen, um von dort aus mit dem Fahrrad in den Drömling zu fahren. Hilf ihr dabei den kürzesten Weg von Haldensleben nach Rätzlingen zu finden (vgl. Abb. 14).



H = Haldensleben
B = Bülstringen
Rä = Rätzlingen
W = Weferlingen
Be = Behnsdorf
F = Flechtingen
I = Ivenrode
Sü = Süplingen
Wi = Wieglitz
C = Calvörde
K = Klinze

Weglängen in km

Abb. 14

Die Suche nach möglichen Wegen führt die Schülerinnen und Schüler zu verschiedenen Fahrradrouten, so u. a. die folgenden:

Rä – C – Wi – B – H (31,2 km)

Rä – K – Be – F – B – H (33,7 km)

Rä – W - I- Sü – H (39,2 km)

Rä – W – Be – F – B – H (40,0 km)

Rä – K – Be – F – I – Sü – H (40,8 km)

Rä – C – F – I – Sü – H (43,9 km)

Die erst genannte Route ist unter diesen unschwer als kürzeste Route erkennbar.
Aber ist es auch die kürzeste? Wir haben noch nicht alle möglichen Routen getestet.

Eingebettet in solche und ähnliche Aufgabenstellungen kann z. B. die Idee des Dijkstra-Algorithmus angewendet werden (vgl. LENEKE, 2005). Die schrittweise Abarbeitung des Algorithmus liefert den Schülerinnen und Schülern garantiert dann den gewünschten kürzesten Weg von einem Startknoten zu jedem anderen Knoten des Graphen. Der Vorteil solcher Algorithmen wird den Schülerinnen und Schülern schnell deutlich.

Beispiel 8:

Das Pizza-Hut-Restaurant befindet sich in Magdeburg in der Kantstraße (Knoten a). Von dort aus werden auch die Bestellungen außer Haus geliefert. Der folgende Graph zeigt Adressen, zu denen ein Pizza-Bote die Bestellungen bringen soll. Die Kantenbewertungen stellen die Entfernungen in km dar.
Finde den kürzesten Weg von Knoten a zum Knoten d. Schreibe in Stichpunkten deine Vorgehensweise auf.

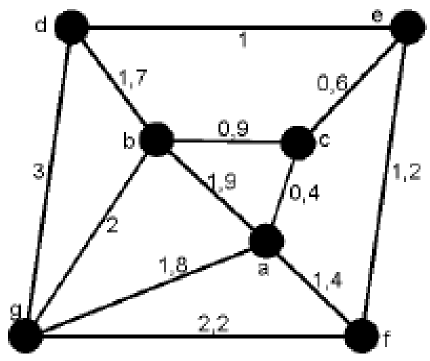


Abb. 15

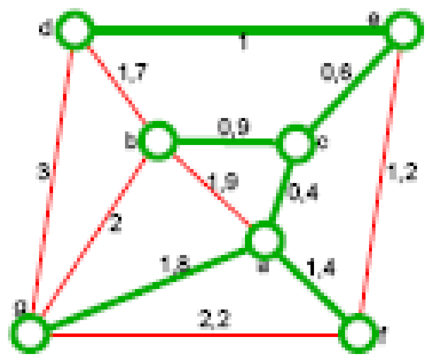


Abb. 16

Die kürzeste Verbindung eines Knotens zum Startknoten a verläuft nun genau auf dem grünen Graphen. Vom Knoten a zum Knoten d beträgt sie 2 km.

Führt man dieses Problem weiter und fragt danach, ob es in einem Graphen eine „Rundreise" gibt, bei der jede Kante genau einmal „durchlaufen" wird und man zum Ausgangspunkt zurückkehrt, ist dies die Frage nach einem speziellem Rundweg – dem Eulerkreis. Das Finden eines Eulerkreises auf einem Graphen könnte mit den Schülerinnen und Schülern ebenfalls algorithmisch gelöst werden (Algorithmus von Hierholzer oder Algorithmus von Fleury). Jedoch wäre der historische Zugang über das berühmte „Königsberger Brückenproblem" auch ohne eine algorithmische Lösung denkbar.

Beispiel 9:

Hier geht es darum, ob eine Rundreise durch Königsberg möglich ist, bei der sieben Brücken genau einmal überquert werden und man den Ausgangspunkt wieder erreicht (vgl. Abb. 17).

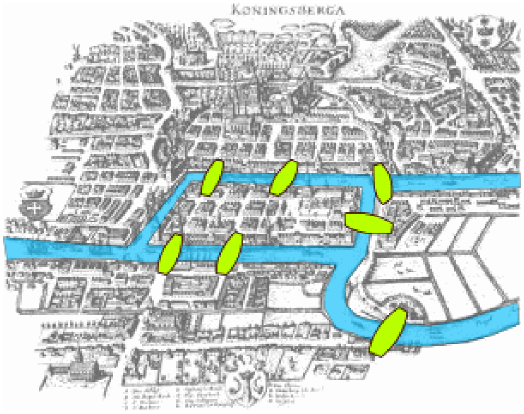


Abb. 17

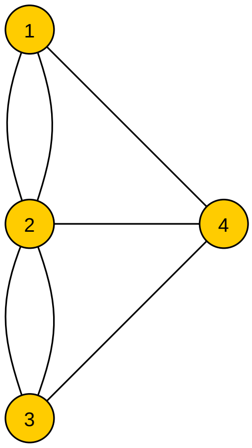


Abb. 18

Das Königsberger Brückenproblem wurde 1796 von Leonhard Euler gelöst. Zur Veranschaulichung vereinfachte Euler die örtlichen Gegebenheiten, indem er die Brücken als Verbindungen zwischen festen Punkten, im speziellen Fall dem Festland und den Inseln, kennzeichnete (vgl. Abb. 18). Der sogenannte „Eulersche Kantenzug“ beschreibt auf einem Graphen eine Folge von Kantenverbindungen, die alle Kanten des Graphen genau einmal enthält. Eine Erweiterung hierzu stellt die Eulertour dar, auf der am Ende des Kantenzuges zum Ausgangsknoten zurückzukehren ist.

Euler erfragte bei dem Königsberger Brückenproblem allerdings nicht nur die Existenz eines solchen Eulerschen Kantenzuges, sondern auch die Bedingungen, die ein Graph zur Findung eines Eulerschen Kantenzuges bzw. einer Eulertour erfüllen muss. Die Schülerinnen und Schüler erfassen diese Bedingung fast intuitiv: Die Anzahl der an jedem Knoten des gegebenen Graphen „angreifenden“ Kanten muss gerade sein. Jeder Knoten des Graphen wird ebenso oft „verlassen“ wie er „besucht“ wird.

Beispiel 10:

Bei welchen Graphen ist ein Eulerkreis möglich?

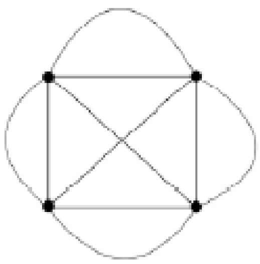
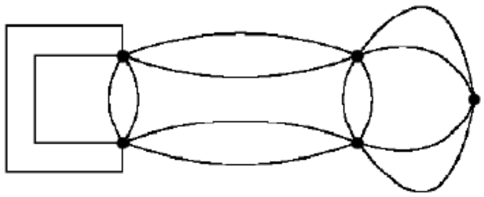
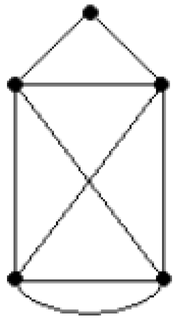
 Graph 1	 Graph 2	 Graph 3

Abb. 19

Im Unterschied zum Finden eines Eulerkreises auf einem Graphen ist die Lösung eines weiteren „Rundreiseproblems“ etwas anders zu realisieren. Hier treten bei dem berühmten „Traveling–Saleman–Problem“ (TSP) **heuristische** Vorgehensweisen in den Vordergrund. In einem vollständigen Graphen mit nur 6 Knoten gibt es 60 solcher Rundreisen, bei denen alle Knoten genau einmal „besucht“ werden und man zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Bei 7 Knoten sind es schon 360 Rundreisen (Existenz- und Anzahlproblem)! Die Schülerinnen und Schüler erkennen die Schwierigkeit: einfach Durchprobieren dauert zu lange und ist bei größerem n kaum möglich. An dieser Stelle kann dann der Begriff des „Hamiltonschen Graphen“ eingeführt werden.

Zu dem Graphen in Beispiel 8 (vgl. Abb. 15) kann die Frage nach der Existenz eines Hamilton-Kreises positiv beantwortet werden (vgl. Abb. 20). Der Graph ist also hamiltonsch.

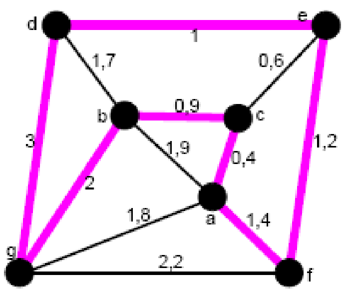


Abb. 20

Eine weitere mögliche Ausgangsproblemstellung ist die Auslieferung von Gütern per Lastwagen in n Städte und die Rückkehr ins Depot. Hinsichtlich der Modellierung kann von einem vollständigen Graphen ausgegangen werden: Jede Stadt ist von jeder anderen direkt erreichbar.

Beispiel 11:

Ein Lastwagenfahrer soll Güter von Magdeburg (MD) aus nach Halle (HA), Dessau (DE) und Stendal (SDL) transportieren und am Schluss wieder in Magdeburg ankommen. Die Tabelle unten zeigt die Entfernungen zwischen den Städten.

	MD	***HA***	***DE***	***SDL***
MD		*98 km*	*62 km*	*62 km*
HA	*98 km*		*56 km*	*161 km*
DE	*62 km*	*56 km*		*125 km*
SDL	*62km*	*161 km*	*125 km*	

In welcher Reihenfolge sollte der Lastwagenfahrer die Städte anfahren, damit der zurückgelegte Transportweg möglichst kurz ist?

a) Prüfe zunächst die folgende Lösungsidee:
Von der Stadt MD aus fährt der Lastwagenfahrer in die nächstgelegene noch nicht besuchte Stadt. Dort verfährt er genauso. Wenn er in allen Städten war, kehrt er zum Ausgangspunkt zurück. Wie lang ist sein Weg?

b) Gibt es kürzere Reisewege?

c) Finde den kürzesten Reiseweg! (Optimierungsproblem)
(vgl. auch LENEKE, 2005)

Die Schülerinnen und Schüler merken sehr schnell, dass die in a) vorgeschlagene Vorgehensweise nicht immer zum besten Ergebnis führt und sie suchen automatisch nach anderen Wegen, noch kürzere Rundreisen zu finden. So könnten z. B. die noch zu besuchenden Orte in eine bereits aufgebaute Tour eingebunden werden (Methode der nahesten Einfügung). Auf jeden Fall merken die Schülerinnen und Schüler, dass beim Finden solcher Rundreise stets der gesamte Graph im Blickfeld bleiben muss, was die in Beispiel 6a) vorgeschlagene Methode nicht realisiert.

In weiteren Beispielen könnte das Rundreiseproblem dann gefestigt werden.

Beispiel 12:

a) Paul ist Tourist und will sich Frankreich anschauen. Er will alle Orte besuchen, die auf der Karte (vgl. Abb. 14) eingezeichnet sind und wieder zum Ausgangspunkt zurück. Mit welchem Problem befasst er sich? Schafft er es?

b) Die Straßen in Frankreich haben Paul so gefallen, dass er nun eine weitere Reise plant. Diesmal will er alle Straßen zwischen den Städten besuchen, ohne jedoch eine doppelt zu befahren. Ist dies möglich? Wenn ja, wie sieht diese Rundreise aus? Wenn nein, welche Straßen müssten aus der Route entfernt werden oder wo müssten noch welche hinzugefügt werden, damit sein Vorhaben klappt?

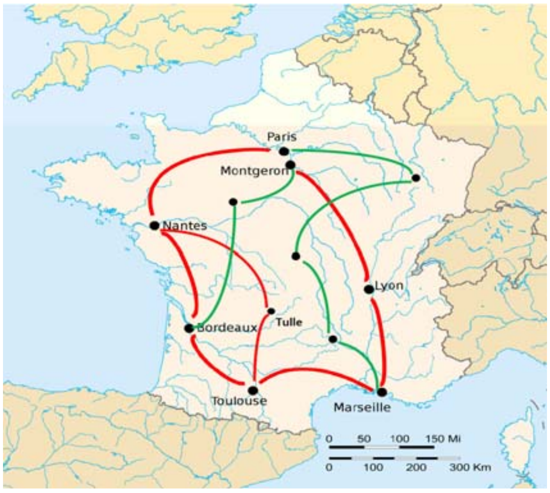


Abb. 21

Beispiel 13:

In der nächsten Woche unternimmt eure Klasse einen Ausflug in den Zoo nach Leipzig. Welchen Rundgang würdet ihr eurer Biologielehrerin vorschlagen, wenn ihr euch 2,5 Stunden im Zoo aufhalten dürft?

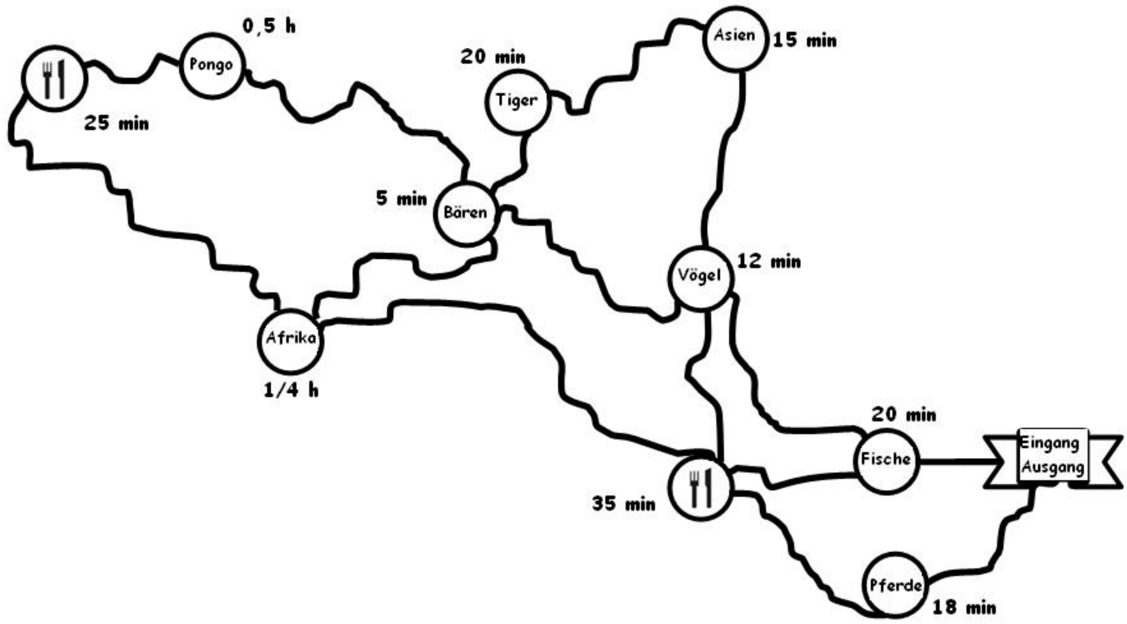


Abb. 22

Für die Planung des Rundganges erhalten die Schülerinnen und Schüler noch einige zusätzliche Informationen:

Fütterungen

Meerkatzen	11.00 Uhr	Tieraffenhaus
Mantelpaviane	11.15 Uhr	Paviananlage
Meerkatzen	15.15 Uhr	Tieraffenhaus
Menschenaffen	15.30 Uhr	Pongoland: Ausgabe von Beschäftigungsfutter
Riff-Fische	16.00 Uhr	Aquarium (Ringbecken)

Kommentierungen durch Tierpfleger

Pinguine	10.30 Uhr	Pinguinküste
Seebären	11.00 Uhr	Seebärenanlage
Baikalrobben	13.30 Uhr	Baikalrobbenanlage
Tiger	14.00 Uhr	Tiger-Taiga

Je nach Interessen können diese Informationen dann in die Planung des Zoobesuches eingearbeitet werden.

5. Gerüste

Eine weitere typische Frage- und Problemstellung der Graphentheorie sei durch das folgende Eingangsbeispiel charakterisiert.

Beispiel 14:

a) Fünf Stationen A, B, C, D und E sind durch ein System von Versorgungsleitungen (Gas, Telefon, Wasser) so miteinander verbunden, dass jede Station mit jeder verbunden ist (vgl. Abb. 22). Um eine Neuverlegung kostengünstiger zu gestalten, wird überlegt, sie mit kleinster Anzahl von Leitungen nur untereinander zu verbinden. Welche Möglichkeiten gibt es? Die Kosten jeder Leitung sind in Tausend Euro angegeben.

b) Jede Leitung hat seinen Preis. Welches Leitungsnetz ist das kostengünstigste?

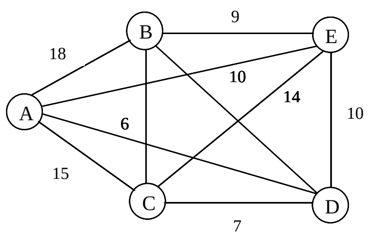


Abb. 23

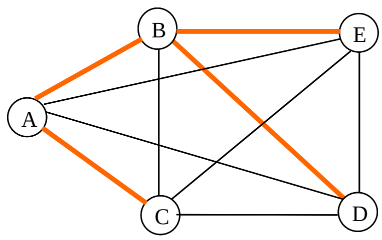


Abb. 24

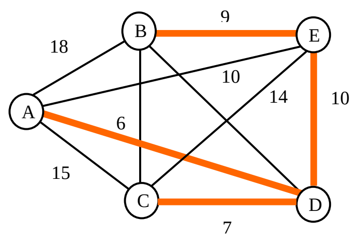


Abb. 25

In Aufgabenstellung a) ist zunächst nach einem **Gerüst** zum gegebenen Graphen gefragt. Die Konstruktionsvorschrift, die zugleich auch Begriffserläuterung sein könnte, sei wie folgt gegeben:

Reduziere den gegebenen Graphen (vgl. Abb. 23) so auf einen Teilgraphen und zeichne ihn so, dass

- *alle Knoten des gegebenen Graphen enthalten sind,*
- *alle Knoten untereinander verbunden sind,*
- *kein Kreis enthalten ist.*

Wann Knoten miteinander verbunden sind, können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe ihrer Kenntnisse über Wege in Graphen erläutern.

Da der Graph zum gestellten Problem im Modell ein **vollständiger Graph** mit fünf Knoten ist, besitzt er $5^3 = 125$ verschiedene Gerüste. Bereits hier ist für die Schülerinnen und Schüler klar, dass für das Finden eines **Minimalgerüstes (Optimierungsproblem)**, was in Aufgabenstellung b) gefragt ist, ein Algorithmus, z. B. der Algorithmus nach Kruskal, sehr hilfreich ist. Das Gerüst mit der kleinsten Summe der Kantengewichte ist das Minimalgerüst.

Für die algorithmische Umsetzung finden die Schülerinnen und Schüler die **Idee** des Algorithmus relativ selbstständig:

Die Kanten in der Reihenfolge aufsteigender Kantengewichte durchlaufen und jede Kante wählen, die mit allen zuvor gewählten Kanten keinen Kreis schließt. Dabei werden alle Knoten erreicht. Alle übrigen Kanten werden entfernt. Es entsteht ein minimal spannender Baum (vgl. Abb. 25).

Der Begriff **„Baum“** als kreisfreier und zusammenhängender Graph könnte vorher mit den Lernenden erarbeitet werden. Zur Festigung wären z. B. folgende Übungen einsetzbar:

Beispiel 15:

Zeichnet jeweils einen Baum mit 4,8 und 12 Knoten.

Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler könnten wie folgt aussehen:

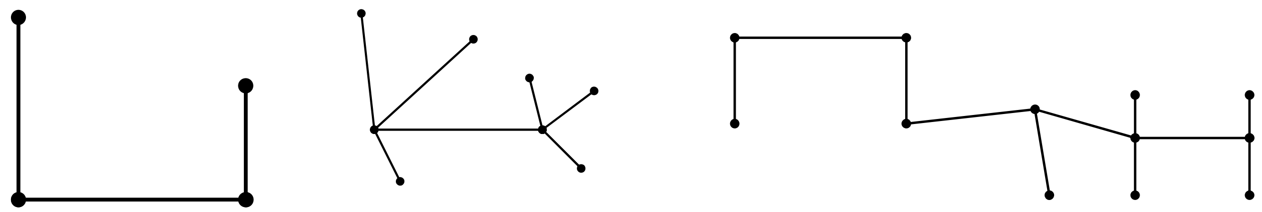


Abb. 26

Beispiel 16:

Sind die folgenden Graphen in Abbildung 27 Bäume oder nicht? Begründe.

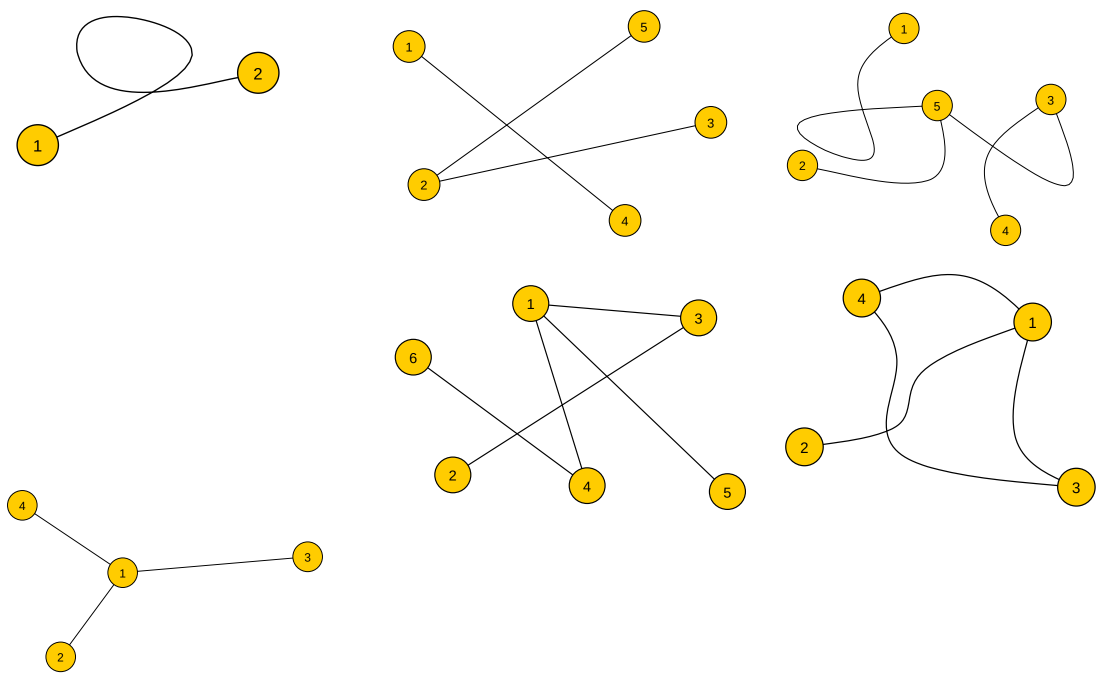


Abb. 27

Anhand weiterer praktischer Problemstellungen (z. B. Energieverbundnetz einer Region) können die Schülerinnen und Schüler zunächst den jeweiligen Graphen konstruieren (Modellierung), ein Gerüst bestimmen (Existenzproblem), verschiedene Gerüste entwickeln (Anzahlproblem) und dann das Minimalgerüst ermitteln (Optimierungsproblem).

Beispiel 17:

Verlegen von Netzkabeln in km (vgl. Abb. 28)
Gesucht ist die Mindestlänge an Kabel, die für die Vernetzung der Gebäude nötig ist.

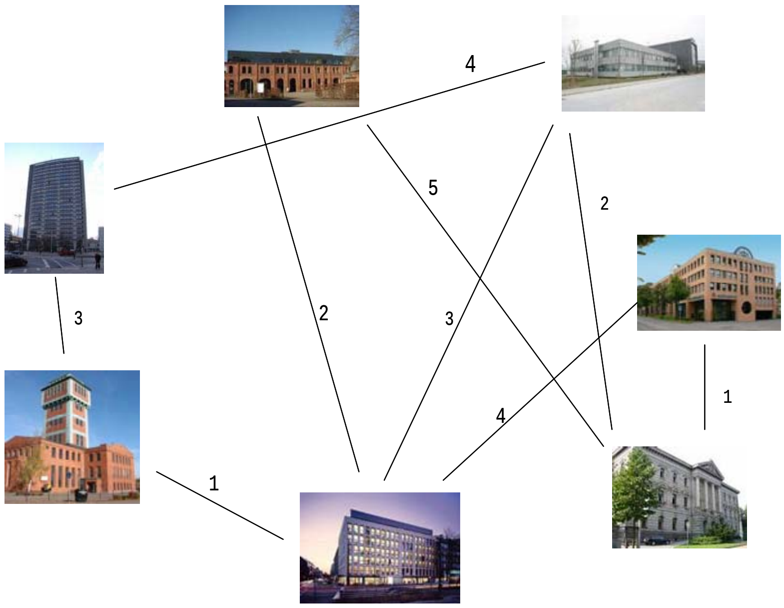


Abb. 28

Zunächst sollten die Schülerinnen und Schüler das **Modell** eines Graphen entwerfen. Sie erkennen, dass dies kein vollständiger Graph ist, so dass die **Anzahl** der Gerüste nicht so einfach bestimmt werden kann. Zum **Minimalgerüst** gelangen sie jedoch recht schnell durch Anwendung des Algorithmus nach Kruskal (vgl. Abb. 29).

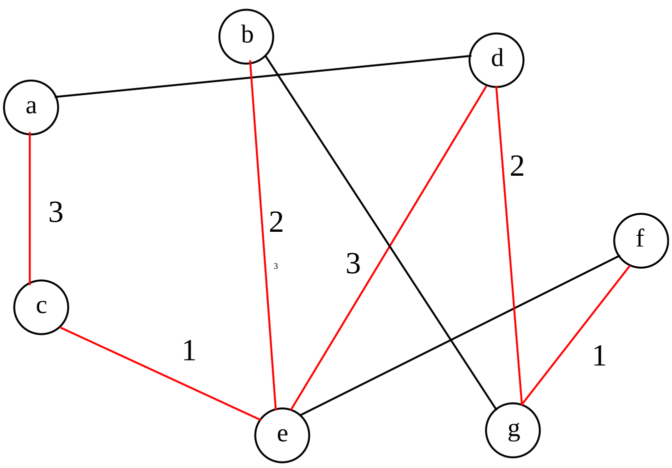


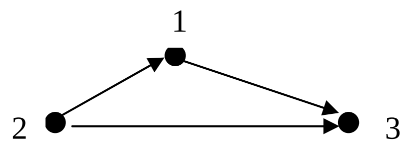
Abb. 29

6. Turniere und Flüsse in Netzwerken

Der Begriff des „Turniers“ kann mit den Schülerinnen und Schüler mit Blick auf konkrete sportliche Wettkämpfe eingeführt werden. Sie kennen bereits den ungerichteten vollständigen Graphen K_n mit n Knoten und sind gegebenenfalls auch schon mit gerichteten Graphen vertraut (vgl. Beispiele 2 und 3). Wenn nun ein sportliches Turnier von n Mannschaften, bei der jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal spielt, betrachtet wird, können wir dies durch einen gerichteten vollständigen Graphen darstellen. Jedes Spiel endet mit Gewinn oder Niederlage, ein „Unentschieden“ gibt es nicht. Eine Kante wird von einem Knoten i (Mannschaft i) zum Knoten j (Mannschaft j) gerichtet, wenn die Mannschaft i gegen die Mannschaft j gewonnen hat. Ein Beispiel für ein mögliches Ergebnis eines Turniers mit drei Mannschaften könnte wie in Abb. 30 dargestellt aussehen.

Beispiel 18:

Abb. 30



Welche Mannschaft hat bei diesem Ausgang des Turniers nur gewonnen und welche nur verloren?

Aus dem Graphen können die Schülerinnen und Schüler ablesen, dass Mannschaft 2 nur gewonnen und Mannschaft 3 nur verloren hat. Mannschaft 1 hat ein Spiel gewonnen:

P(1) = 1 P(2) = 2 P(3) = 0

Die Anzahl der gewonnenen Spiele wird durch die Punkteanzahl P(u) einer Mannschaft u ausgedrückt. P(u) ist gleich der Anzahl der vom Knoten u wegführenden Kanten. Zur Übung könnten die Schülerinnen und Schüler nun einige mögliche Turniere mit 3, 4 und 5 Knoten zeichnen und die einzelnen Punktzahlen den jeweiligen Mannschaften zuordnen. Weiterführende Aufgabenstellungen geben Gelegenheit auch kombinatorische Überlegungen einzubeziehen (vgl. auch KOTH/MALLE, 1999).

Beispiel 19:

Es ist ein möglicher Turniergraph mit fünf Mannschaften dargestellt.
Gibt es auch ein 5 - Mannschaftsturnier, in dem jede Mannschaft die gleiche Punktzahl hat?

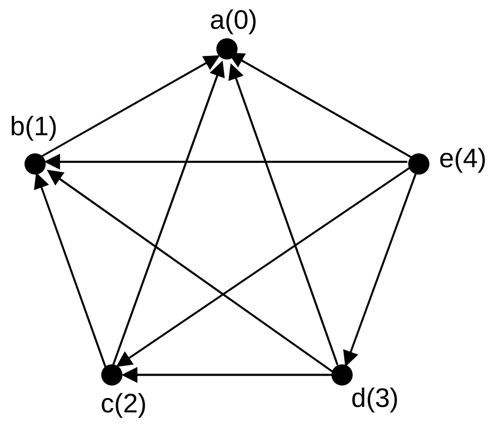


Abb. 31

Weiterführende Betrachtungen könnten die Schülerinnen und Schüler zu einer allgemeinen Konstruktionsvorschrift solcher Turniere mit n Mannschaften (n ist ungerade) und der Feststellung, dass jede Mannschaft in einem solchen Turnier dann $\frac{n-1}{2}$ Punkte hat, führen.

Beispiel 20:

Wir betrachten ein Schachturnier, bei dem jeder Spieler gegen jeden spielt. Jedes Spiel ermittelt einen Sieger. Der Ausgang „Remis“ kommt zur Vereinfachung nicht vor. Die Spieler sind Karpov (Kp), Kasparov (Ks), Fisher (Fi) und Deep Blue (DB). Die Spiele hatten folgende Ergebnisse: Karpov gewinnt gegen Kasparov und Deep Blue und verliert gegen Fisher. Kasparov gewinnt gegen Deep Blue und Fisher und verliert gegen Karpov. Fisher gewinnt gegen Karpov und verliert gegen Kasparov sowie gegen Deep Blue.

a) Zeichne den Turniergraphen für das gegebene Turnierergebnis.

b) Welches Kriterium muss für den Turniergraphen erfüllt sein, damit ein eindeutiger Turniersieger bestimmt ist?

Der in a) geforderte Turniergraph ist in Abb. 32 dargestellt. Es gibt keinen eindeutigen Sieger. Für die Bestimmung eines eindeutigen Turniersiegers muss es einen von n Teilnehmern geben, der (n –1) Punkte hat. Es kann auch nur höchstens ein solch Teilnehmer existieren. Hat er alle anderen geschlagen, können diese höchstens (n –2) Punkte haben.

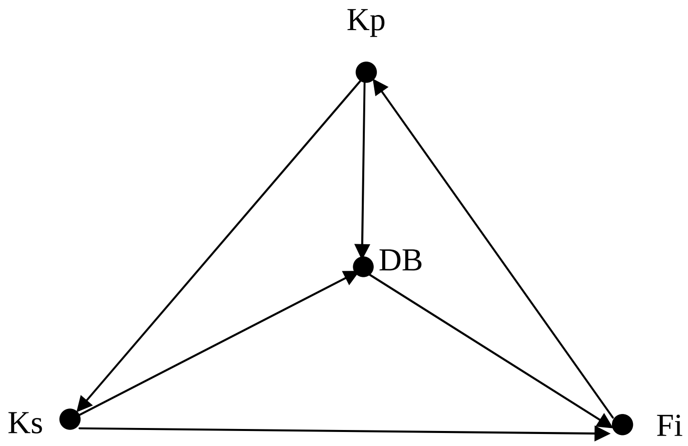


Abb. 32

Im alltäglichen Leben lassen sich viele Probleme finden, bei denen es darum geht, die optimale Ausnutzung der Kapazitäten eines Transportweges zu verwirklichen:

- Welchen Verkehrsfluss (in Fahrzeugen pro Minute) kann ich höchstens durch eine Stadt leiten, deren Straßennetz gegeben ist?

- Welche Wassermenge kann ich durch die Kanalisation höchstens abtransportieren?
- Wie viel Daten können in einem Kommunikationsnetzwerk maximal übertragen werden?

- Welche Warenmenge kann auf einer Bahnstrecke höchstens transportiert werden?

Diese Sachverhalte können in Form von gerichteten Graphen mit einer Quelle und Senke dargestellt werden, wobei jeder gerichteten Kante eine bestimmte Transportkapazität zugeordnet wird. Ein solcher Graph heißt **Netzwerk**, in welchem die **maximale Transportkapazität** gefunden werden soll, die man als **maximalen Fluss** bezeichnet.

Beispiel 21:

Ein Paketzusteller will jeden Tag eine maximale Anzahl von Paketen von einer Stadt S zu einer Stadt T transportieren. Jeder Transport muss, wie die angefügte Abbildung verdeutlicht, über die Zwischenstädte a, b, c, d gehen. Dabei hat jede Transportroute e=(x, y) von einer Stadt X zu einer Stadt Y nur eine begrenzte Kapazität, d.h. pro Tag kann über eine Kante e nur eine bestimmte Anzahl von Paketen von einer Stadt X zu einer Stadt Y transportiert werden, da auf dieser Strecke eine begrenzte Anzahl von Lastwagen zur Verfügung steht.

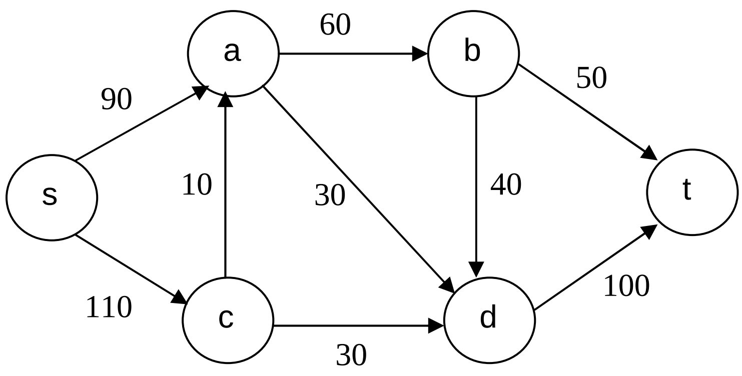


Abb. 33

Die Schülerinnen und Schüler können sich durch **systematisches Probieren** einen maximalen Fluss bestimmen, merken jedoch, dass hier eine algorithmische Lösung vielleicht wesentlich effizienter wäre. An dieser Stelle könnte der Algorithmus von Ford/Fulkerson eingesetzt werden. Dabei wird zunächst der Fluss im Graphen mit 0 initialisiert. Dann wird der Fluss jeweils erweitert, bis kein Zuwachs durch einen Pfad, der den Fluss verbessert, mehr möglich ist. Ford und Fulkerson beschreiben einen iterativen Algorithmus (vgl. Abb. 34).

Eingabe: Netzwerk N=(G,q,s,c); Ausgangsfluss f

Ausgabe: Maximaler Fluss f auf N

1. Schritt: Markiere die Quelle q mit (-,q)

2. Schritt: Suche einen Knoten v, der entweder die Eigenschaft (a) oder die Eigenschaft (b) hat

(a) e=(i,v), und i ist bereits markiert und c(e)- f(e)>0

(b) e= (v,i) und i ist bereits markiert und f(e)>0

Wenn kein solcher Knoten existiert, dann gehe zu Schritt 3, ansonsten markiere v mit:

im Fall (a): (i,d(v)), d(v)= min (d(i), c(e)- f(e))

oder

im Fall (b): (j, d(v)), d(v)= min (d(j), f(e))

und gehe zu Schritt (2)

3. Schritt: Falls die Senke s nicht markiert wurde, liegt maximaler Fluss vor-> Stopp, sonst

4. Schritt: Bestimme einen flussvergrößernden Weg rückwärts, von s nach q, und berechne den neuen Fluss:

$$f(e) = \begin{cases} f(e) + d(s), e Vorwärtskante \\ f(e) - d(s), e Rückwärtskante \\ f(e), sonst \end{cases}$$

Gehe zu Schritt 1

Abb. 34

Das Ergebnis dieses iterativen Prozesses zum Beispiel 21 ist in Abb. 35 dargestellt.

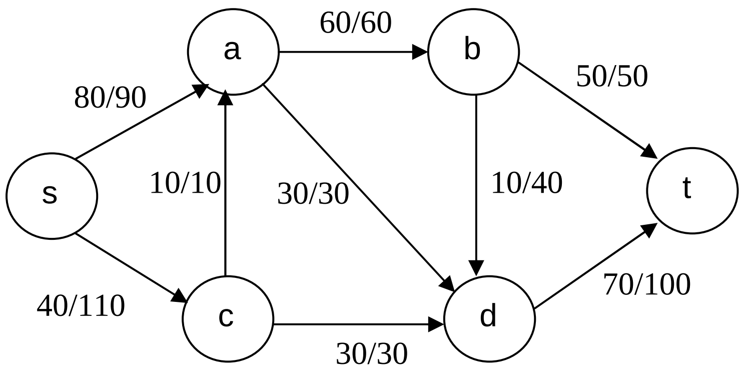


Abb. 35

7. Zusammenfassung

Die Graphentheorie ermöglicht es im Mathematikunterricht anhand zahlreicher Beispiele Anwendungsbezüge herzustellen und Anwendungssituationen als Ausgangspunkt für typische graphentheoretische Fragestellungen zu wählen. Die Schülerinnen und Schüler werden mit mathematischen Modellen vertraut gemacht, die sehr gut visualisiert werden können. Die Anwendungsorientierung ermöglicht zudem eine gute Vernetzung zu anderen Teilgebieten der Mathematik sowie zu Inhalten anderer Unterrichtsfächer (z. B. Physik, Geographie, Informatik).

Bei der Lösung graphentheoretischer Problemstellungen können die Schülerinnen und Schüler Lösungsstrategien entwickeln, kennen lernen und festigen, wie z. b. bestimmte **Heuristiken** bei der Lösung des Rundreiseproblems TSP. Für einige Problemstellungen bietet es sich förmlich an, das **algorithmische Arbeiten** zu intensivieren. Hier eröffnen sich Möglichkeiten, gemeinsam mit dem Informatikunterricht die Idee verschiedener Algorithmen zu diskutieren und gegebenenfalls diese dann auch mittels moderner Rechentechnik zur Lösung der Probleme anzuwenden. Das würde auch die Implementierung in die entsprechende Syntax der jeweils verwendeten Technik einschließen.

Durch die Bearbeitung von „leichten" (im Sinne: es liegt ein Algorithmus vor) als auch von „schweren" (TSP) Problemen kann bei den Schülerinnen und Schülern das Bild von Mathematik weiter geformt werden, auch in dem Sinne, dass eben doch noch nicht alles fertig gelöst ist und von daher die Lösung an sich kein Problem mehr sei. Dabei unterstützen sowohl offene Aufgabenstellungen, die in vielen Fällen dann auch an offene Unterrichtsformen gebunden sind, als auch geschlossene Aufgaben, die dann jedoch von den Schülerinnen und Schülern selbst **variiert** werden, so dass ihre eigenen Ideen und Interessen Eingang finden können.

Das gesamte Gebiet der Graphentheorie bietet zahlreiche inhaltliche Aspekte, aus denen für die Realisierung im Unterricht ausgewählt werden kann. Die hier vorgestellten sind so eine Auswahl. Denkbar sind natürlich weitere Inhalte, die auf das Interesse von Schülerinnen und Schüler stoßen könnten. Zu denken ist dabei z. B. an die Behandlung von Matchings, von speziellen Bäumen oder auch an Färbungen von Graphen. Jeder dieser inhaltlichen Aspekte bietet soviel Spielraum, so dass für Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichem Leistungsniveau geeignete Beispiele und Problemstellungen diskutiert werden können.

8. Literatur

Brandenberg, R., Gritzmann, P. (2003). *Das Geheimnis des kürzesten Weges.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. Bruder, R., Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2005). Diskrete Mathematik. 129 mathematik lehren. Velber: Friedrich Verlag.

Bruder, R., Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2005). *Diskrete Mathematik.* 129 mathematik lehren. Velber: Friedrich Verlag.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5d/Konigsberg_bridges.png

Hußmann, St. (2007). *Auf dem kürzesten Weg von Insel zu Insel.* Praxis der Mathematik Heft 14, 49. Jg. Köln/Leipzig: Aulis-Verlag Deubner

Koth, M., Malle, G. (1999). *Turniere.* 95 mathematik lehren. Velber: Friedrich Verlag.

Jungnickel, D. (1994). *Graphen, Netzwerke und Algorithmen.* Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.

Jäger, J., Schupp, H. (1997). *Das Problem des Handlungsreisenden.* 81 mathematik lehren. S. 21 – 51 Velber: Friedrich Verlag.

Leneke, B. (2005). *Einführung in die Graphentheorie – mit Graphen kürzeste Wege finden.* 42 RAAbits. Stuttgart: RAABE Fachverlag für die Schule.

Läuchli, P. (1991). *Algorithmische Graphentheorie.* Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag

Lobach, B. (2009). *Möglichkeiten der Einbeziehung graphenteoretischer Elemente in den Mathematikunterricht am Beispiel von Bäumen und Gerüsten.* Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Matousek, J., Nesetril, J. (2002, 2007). *Diskrete Mathematik – Eine Entdeckungsreise.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

Tittmann, P. (2003). *Graphentheorie – Eine anwendungsorientierte Einführung.* Leipzig: Fachbuchverlag Leipzig