Prof. Dr. Volker Kaibel

Otto-von-Guericke U MD

Sommersemester 2013

# Ganzzahlige Lineare Optimierung

## 1. Übungsblatt

Besprechung: Freitag, 10. Mai

---

**Aufgabe 1**
Zeigen Sie, dass $\langle \det A \rangle = \mathrm{O}(\langle A \rangle)$ für die Kodierungslänge der Determinante jeder Matrix $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ gilt. (Hinweis: Überlegen Sie, dass es genügt, die Aussage für ganzzahlige Matrizen zu zeigen, und schätzen Sie eine Summe von Produkten mittels eines Produkts von Summen ab.)

**Aufgabe 2** Für $M \in \mathbb{N}$ und $y, z \in \mathbb{Q}^m$ bedeute $y \equiv z \mod M$, dass $y$ und $z$ komponentenweise kongruent modulo $M$ sind (also $y_i - z_i \in M\mathbb{Z}$ für alle $i \in [m]$ gilt). Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ die Gleichung $Ax = b$ genau dann eine ganzzahlige Lösung besitzt, wenn für jedes $M \in \mathbb{N}$ die Kongruenz $Ax \equiv b \mod M$ eine ganzzahlige Lösung besitzt.

**Aufgabe 3**
Zeigen Sie, dass für reguläre Matrizen $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ die folgenden Aussagen paarweise äquivalent sind:

1. $U$ ist unimodular.
2. $U^{-1}$ ist unimodular.
3. $U^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$
4. $\Lambda(U) = \mathbb{Z}^n$

**Aufgabe 4**
Zeigen Sie, dass $\Lambda\{a_1, \dots, a_n\} = \mathbb{Z} \cdot \text{ggT}\{a_1, \dots, a_n\}$ für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ gilt.

**Aufgabe 5**
Bestimmen Sie die Hermite-Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & -6 \\ 3 & 10 & 7 & -13 \\ 6 & 0 & -1 & -16 \\ 0 & -13 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die ganzzahlige Lösungsmenge des linearen Diophantischen Gleichungssystems $Ax = (2, -1, 13, 4)^{\mathrm{T}}$ an.