Prof. Dr. Volker Kaibel
Otto-von-Guericke U MD
Sommersemester 2013

Ganzzahlige Lineare Optimierung

2. Übungsblatt

Besprechung: Freitag, 14. Juni

Aufgabe 1 Sei $D = (V, A)$ mit $A \subseteq V \times V$ ein gerichteter Graph und $T \subseteq V \times V$ eine Menge von Bögen (nicht notwendigerweise aus A), die als ungerichtete Kanten aufgefasst einen aufspannenden Baum auf V bilden. Für jeden Bogen $a \in A$ sei P_a der Weg im Baum T vom Anfangsknoten von a zum Endknoten von a. Eine Matrix $N \in \{-1, 0, 1\}^{T \times A}$ mit

$$N_{(t,a)} = \begin{cases} +1 & \text{falls } P_a \text{ den Bogen } t \text{ entlang seiner Richtung benutzt} \\ -1 & \text{falls } P_a \text{ den Bogen } t \text{ entgegen seiner Richtung benutzt} \\ 0 & \text{falls } P_a \text{ den Bogen } t \text{ gar nicht benutzt} \end{cases}$$

heißt eine *Netzwerkmatrix*. Zeigen Sie, dass Netzwerkmatrizen total unimodular sind.

Aufgabe 2 *Intervallmatrizen* sind Matrizen $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$, deren sämtliche Zeilen die Form $(0, \dots, 0, 1 \dots, 1, 0 \dots, 0)$ haben (d.h. es gibt keine $i \in [m]$, $j_1, j_2, j_3 \in [n]$ mit $j_1 < j_2 < j_3$ und $A_{i,j_1} = 1$, $A_{i,j_2} = 0$, $A_{i,j_3} = 1$), sowie die Transponierten solcher Matrizen. Zeigen Sie, dass alle Intervallmatrizen total unimodular sind.

Aufgabe 3 Sei $M \in \{0, 1\}^{11 \times 9}$ die Elemente-Mengen Inzidenzmatrix des Mengensystems $\mathcal{S}$ in Abbildung 1 (auf der folgenden Seite), d.h.

$$M_{iU} = \begin{cases} 1 & i \in U \\ 0 & i \notin U \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \{a, \dots, \ell\}, U \in \{A, \dots, J\}.$$

Zeigen Sie, dass M total unimodular ist. Verallgemeinern Sie die Aussage auf eine geeignete Klasse von Teilmengensystemen.

Aufgabe 4 Seien $k \in \{1, 2, \dots\}$ und $P = \mathrm{conv}\{(0, 0), (0, 1), (k, \frac{1}{2})\}$. Zeigen Sie, dass $P_I \subsetneq P^{(t)}$ für alle $t < k$ gilt. (*Hinweis*: Zeigen (und benutzen) Sie $(k - 1, \frac{1}{2}) \in P'$.)

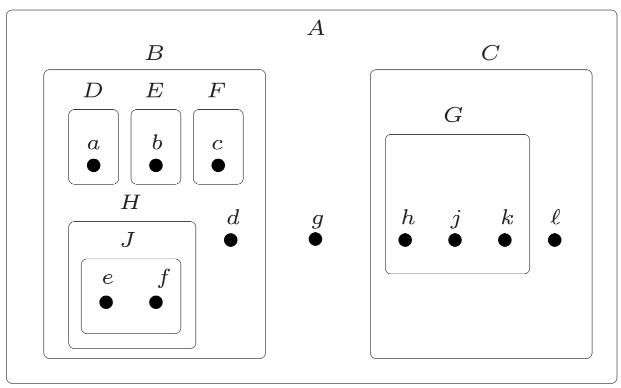

Abbildung 1: Das Mengensystem in Aufgabe 1. Die schwarzen Punkte (a–ℓ) repräsentieren die Elemente, die Rechtecke (A–J) die Mengen.