Prof. Dr. Volker Kaibel | Otto-von-Guericke U MD
Sommersemester 2014

Algebraische Methoden der Diskreten Optimierung

2. Übungsblatt

Besprechung: Donnerstag, 15. Mai

Aufgabe 1
Zeigen Sie die Hifsaussage aus dem Beweis zu Satz 2.7: Für $p \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ und $v \in \mathbb{C}^n$ gelten folgende Implikationen:

1. $p(v) = 0, p(\overline{v}) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(p)(v) = 0, \mathrm{Im}(p)(v) = 0$
2. $p(v) = 1, p(\overline{v}) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(p)(v) = \frac{1}{2}, \mathrm{Im}(p)(v) = \frac{1}{2i}$

Aufgabe 2
Zeigen Sie die folgenden beiden im Beweis zu Satz 2.7 verwendeten Aussagen (wobei V, S, T und p^v wie dort definiert seien):

1. $\mathbb{R}[\mathbf{x}]/\mathcal{I}(V_{\mathbb{C}}(\mathcal{I})) =$
$\{\sum_{v \in S} \lambda_v [p^v] + \sum_{v \in T} \mu_v [\mathrm{Re}(p^v)] + \sum_{v \in T} \nu_v [\mathrm{Im}(p^v)] \mid \lambda \in \mathbb{R}^S, \mu, \nu \in \mathbb{R}^T\}$
2. Sind $\lambda \in \mathbb{R}^S$ und $\mu, \nu \in \mathbb{R}^T$ so, dass
$$\sum_{v \in S} \lambda_v [p^v] + \sum_{v \in T} \mu_v [\mathrm{Re}(p^v)] + \sum_{v \in T} \nu_v [\mathrm{Im}(p^v)] = \mathbb{O} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}[\mathbf{x}]/\mathcal{I}$$
ist, so gelten $\lambda = \mathbb{O}$, $\mu = \mathbb{O}$ und $\nu = \mathbb{O}$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass ein Polynom aus $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ genau dann eine Summe von Quadraten ist, wenn dies für seine Homogenisierung gilt (Lemma 3.3(ii)).

Aufgabe 4
Beweisen Sie mit Hilfe des Positivstellensatzes (3.6) den reellen Nullstellensatz (2.1(ii)).

Aufgabe 5
Zeigen Sie mit Hilfe des Positivstellensatzes (3.6), dass ein Polynom $p \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ genau dann auf ganz $\mathbb{R}^n$ nicht-negativ ist, wenn es Polynome $a_j, 0 \neq b_j \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ ($j \in [m]$, $m \in \mathbb{N}$) mit
$$p = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{a_j}{b_j}\right)^2$$
gibt (Korollar 3.7, Hilberts 17. Problem).