Prof. Dr. Volker Kaibel Otto-von-Guericke U MD
Sommersemester 2014

Algebraische Methoden der Diskreten Optimierung
3. Übungsblatt

Besprechung: Donnerstag, 19. Juni

Aufgabe 1
Beweisen Sie Satz 3.13 aus der Vorlesung: Ist $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0 \ \forall i \in [m]\}$ beschränkt, so sind für den quadratischen Modul $M = M(g_1, \ldots, g_m)$ folgende Aussagen paarweise äquivalent:

1. M ist archimedisch (d.h. es gibt $g \in M$ mit $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \geq 0\}$ beschränkt).
2. Es gibt ein $\varrho > 0$, so dass $\varrho - \|x\|^2 \in M$ ist.
3. Für jedes $f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ gibt es ein $\varrho > 0$, so dass $\varrho \pm f \in M$ ist.
4. Es gibt $f_1, \ldots, f_s \in M$, so dass $\prod_{i \in I} f_i \in M$ für alle Teilmengen $I \subseteq [m]$ gilt, und die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geq 0 \ \forall i \in [s]\}$ beschränkt ist.

(Tipp: Machen Sie einen Ringschluss, in welchem Sie für die einzige nicht-triviale Implikation Satz 3.X(S) zum Einsatz bringen.)

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass das einzige Polynom in $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ (in n Variablen), das auf irgendeiner volldimensionalen Kugel in $\mathbb{R}^n$ verschwindet, das Nullpolynom ist.

Aufgabe 3
In dieser Aufgabe sei $n = 1$ (univariate Polynome). Für $p \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ mit $d = \deg(p)$ sei

$$\tilde{p} = (1 + \mathbf{x})^d \cdot p\left(\frac{1 - \mathbf{x}}{1 + \mathbf{x}}\right) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$$

die *Goursat-Transformation* von p. Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. Ist $p \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ nicht-negativ auf $[0, \infty[$, so ist $p \in M_{\deg(p)}(\mathbf{x})$. (Tipp: Faktorisieren Sie p.)
2. Für $p \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ gelten:
   (a) $p \geq 0$ auf $[-1, 1] \iff \tilde{p} \geq 0$ auf $[0, \infty[$
   (b) $\tilde{\tilde{p}} = 2^{\deg(p)} p$
3. Ist $p \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ nicht-negativ auf $[-1, 1]$, so ist $p \in M_t(1 - \mathbf{x}^2)$ mit $t = 2\lceil \frac{\deg(p)}{2} \rceil$.