Prof. Dr. Volker Kaibel

Otto-von-Guericke U MD

Sommersemester 2016

Algebraische Methoden der Diskreten Optimierung

1. Übungsblatt

Besprechung: Dienstag, 3. Mai

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass das reguläre n-Eck ($n \geq 3$) die Lösungsmenge eines Systems von zwei Polynomungleichungen ist.

Aufgabe 2
Beweisen Sie Lemma 2.4 aus der Vorlesung: Für jedes Ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ gelten:

1. $\mathcal{I}$ ist genau dann radikal, wenn für alle $f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ folgende Implikation gilt:
$$f^2 \in \mathcal{I} \Rightarrow f \in \mathcal{I} \tag{1}$$

2. $\mathcal{I}$ ist genau dann reell radikal, wenn für alle $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ folgende Implikation gilt:
$$\sum_{j=1}^{m} p_j^2 \in \mathcal{I} \Rightarrow p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{I} \tag{2}$$

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass (auch) für multivariate Polynome $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ die Gleichung
$$\deg(\sum_{j=1}^{m} q_j^2) = 2 \cdot \max\{\deg(q_1), \ldots, \deg(q_m)\}$$
gilt.

Aufgabe 4
Konstruieren Sie ein Zertifikat wie in Satz 2.6 für die triviale Tatsache, dass in einem vollständigen Graphen auf drei Knoten keine stabile Menge (d.h. eine Menge paarweise nicht adjazenter Knoten) mehr als einen Knoten enthält; verwenden Sie zur Modellierung der stabilen Mengen dieses System:
$$\mathbf{x}_1^2 - \mathbf{x}_1 = 0,\ \mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_2 = 0,\ \mathbf{x}_3^2 - \mathbf{x}_3 = 0$$
$$-\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 1 \geq 0,\ -\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 + 1 \geq 0,\ -\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 + 1 \geq 0$$