Prof. Dr. Volker Kaibel | Otto-von-Guericke U MD
Sommersemester 2016

Algebraische Methoden der Diskreten Optimierung
2. Übungsblatt

Besprechung: Freitag, 17. Juni

Aufgabe 1
Beweisen Sie mit Hilfe des Positivstellensatzes (3.6) den reellen Nullstellensatz (2.1(ii)).

Aufgabe 2
Zeigen Sie mit Hilfe des Positivstellensatzes (3.6), dass ein Polynom $p \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ genau dann auf ganz $\mathbb{R}^n$ nicht-negativ ist, wenn es Polynome $a_j, 0 \neq b_j \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ ($j \in [m]$, $m \in \mathbb{N}$) mit

$$p = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{a_j}{b_j} \right)^2$$

gibt (Korollar 3.7, Hilberts 17. Problem).

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass das einzige Polynom in $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ (in n Variablen), das auf irgendeiner volldimensionalen Kugel in $\mathbb{R}^n$ verschwindet, das Nullpolynom ist.

Aufgabe 4
Beweisen Sie Satz 3.13 aus der Vorlesung: Ist $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0 \ \forall i \in [m]\}$ beschränkt, so sind für den quadratischen Modul $M = M(g_1, \ldots, g_m)$ folgende Aussagen paarweise äquivalent:

1. M ist archimedisch (d.h. es gibt $g \in M$ mit $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \geq 0\}$ beschränkt).
2. Es gibt ein $\varrho > 0$, so dass $\varrho - \|x\|^2 \in M$ ist.
3. Für jedes $f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ gibt es ein $\varrho > 0$, so dass $\varrho \pm f \in M$ ist.
4. Es gibt $f_1, \ldots, f_s \in M$, so dass $\prod_{i \in I} f_i \in M$ für alle Teilmengen $I \subseteq [m]$ gilt, und die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geq 0 \ \forall i \in [s]\}$ beschränkt ist.

(Tipp: Machen Sie einen Ringschluss, in welchem Sie für die einzige nicht-triviale Implikation Satz 3.X(S) zum Einsatz bringen.)