VL 10 (7.6.16)

Modellierung 1
(V. Kaibel, OvGU MD)

[4a] Sei $q \geq \chi(G)$ (z.B. $q := |V(G)|$)

Variablen:
- $x_{vj} \in \{0,1\}$ $(v \in V(G),\ j \in [q])$

  („$x_{vj} = 1 \Leftrightarrow$ v erhält Farbe j")
- $y_j \in \{0,1\}$ $(j \in [q])$

  („$y_j = 1 \Leftrightarrow$ Farbe j wird benutzt")

IP-Modell

$$\min \sum_{j=1}^{q} y_j$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{q} x_{vj} = 1 && \forall v \in V(G) \\ & x_{vj} + x_{wj} \leq 1 && \forall vw \in E(G)\ \forall j \in [q] \\ & x_{vj} - y_j \leq 0 && \forall v \in V(G)\ \forall j \in [q] \\ & x_{vj} \in \{0,1\} && \forall v \in V(G),\ j \in [q] \\ & y_j \in \{0,1\} && \forall j \in [q] \end{aligned}$$

Varianten des Modells

1. Variante

$$\min \sum_{j=1}^{q} y_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{q} x_{vj} = 1 \qquad \forall v \in V(G)$$

$$x_{vj} + x_{wj} \leq y_j \qquad \forall vw \in E(G)\ \forall j \in [q]$$

$$x_{vj} - y_j \leq 0 \qquad \forall v \in V(G)\ \forall j \in [q]$$

$$x_{vj} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V(G), j \in [q]$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in [q]$$

2. Variante

<u>Beobachtung</u>: Können annehmen, dass die ersten $\chi(G)$ Farben benutzt werden.
(Verkleinerung des Suchraums)

$$\min \sum_{j=1}^{q} y_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{q} x_{v_j} = 1 \qquad \forall v \in V(G)$$

$$x_{v_j} + x_{w_j} \leq y_j \qquad \forall vw \in E(G)\ \forall j \in [q]$$

$$x_{v_j} - y_j \leq 0 \qquad \forall v \in V(G)\ \forall j \in [q]$$

$$y_{j+1} - y_j \leq 0 \qquad \forall j \in [q-1]$$

$$x_{v_j} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V(G),\ j \in [q]$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in [q]$$

3. Variante: Beobachtung: können annehmen:
Falls Farbe j benutzt wird, so ist j die kleinste Nummer eines Knotens mit Farbe j (färbe jede Farbklasse mit der kleinsten Nummer eines Knotens in ihr.)

$$\min \sum_{j=1}^{q} y_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{q} x_{vj} = 1 \qquad \forall v \in V(G)$$

$$x_{vj} + x_{wj} \leq y_j \qquad \forall vw \in E(G)\ \forall j \in [q]$$

$$x_{vj} - y_j \leq 0 \qquad \forall v \in V(G)\ \forall j \in [q]$$

$$x_{vj} \leq 1 - y_j \qquad \forall v \in V(G)\ \forall j \in [q]: v < j$$

$$x_{vj} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V(G), j \in [q]$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in [q]$$

[50] (Vgl. Abschnitt 1.5 "Reihenfolgeplanung")

$V(D) = \{1, \dots, n\} = [n]$

Variablen: • $x_{vw} \in \{0,1\}$ $\quad (vw \in A(D))$

("$x_{vw} = 1 \iff vw \in H$")

• $y_v \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ $\quad (v \in \{2, \dots, n\})$

("$y_v = j \iff v$ liegt in H an j-ter Position nach Knoten 1")

IP-Modell:

$$\min \sum_{a \in A(D)} c_a x_a$$

$$\text{s.t.} \sum_{a \in \delta^{\text{out}}(v)} x_a = 1 \qquad \forall v \in V(D)$$

$$\sum_{a \in \delta^{\text{in}}(v)} x_a = 1 \qquad \forall v \in V(D)$$

$$(*) \quad n \cdot x_{vw} - (y_w - y_v) \leq n-1 \qquad \forall vw \in A(D):\ v, w \neq 1$$

$$x_a \in \{0,1\} \qquad \forall a \in A(D)$$

$$1 \leq y_v \leq n-1 \qquad \forall v \in \{2, \dots, n\}$$

Lemma MTZ ("Miller, Tucker, Zemlin")

Erfüllt $\bar{x} \in \{0,1\}^{A(D)}$ (*), so enthält in der von $\bar{x}$ repräsentierten Menge

$$A(\bar{x}) := \{a \in A(D) : \bar{x}_a = 1\}$$

jeder (gerichtete) Kreis den Knoten 1.

Beweis: Angenommen, $k \subseteq A(\bar{x})$ sei ein Kreis mit Knotenmenge $V(k)$ und $1 \notin V(k)$. Dann ist für alle $vw \in k$ (*) für $\bar{x}$ gültig. Summiert man alle diese Ungleichungen, so erhält man:

$$\sum_{vw \in k} n \cdot \underbrace{\bar{x}_{vw}}_{\overset{k \subseteq A(\bar{x})}{=} 1} - \underbrace{\sum_{vw \in k} (y_w - y_v)}_{k \text{ Kreis} = 0} \leq \underbrace{\sum_{vw \in k} (n-1)}_{|k| \cdot (n-1)}$$

$$\Longrightarrow \quad |k| \cdot n \leq |k| \cdot (n-1) \qquad \Big| : |k|$$

$$\Longrightarrow \quad n \leq n-1 \qquad \Big| -n$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq -1 \quad ↯$$