VL 12 (21.6.16)

Modellierung 1
(V. Kaibel, OvGU MD)

MIP-Modell

$$\left(\begin{array}{l} V := V(G) \\ n := |V| \end{array} , E := E(G) , A := A(D(G)) \right)$$

$\{1, \dots, n\}$

$$\min \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

s.t. $\quad x_{\{v,w\}} = y_{(v,w)} + y_{(w,v)} \qquad \forall \{v,w\} \in E$

(1) $\quad \sum_{a \in \delta^{ein}(v)} y_a = 1 \qquad \forall v \in V \setminus \{1\}$

(2) $\quad \sum_{a \in \delta^{ein}(1)} y_a = 0$

(*) $\quad n \cdot y_{vw} - (z_w - z_v) \leq n-1 \qquad \forall v, w \in V \setminus \{1\},$
$\qquad vw \in A$

$y_{vw} \in \{0,1\} \qquad \forall vw \in A$

$1 \leq z_v \leq n-1 \qquad \forall v \in V \setminus \{1\}$

Bemerkungen zur Korrektheit des Modells

Die Bedingungen sind offenbar gültig. Umgekehrt gilt für jede zulässige Lösung (x,y,z) wegen Lemma 9.17 und (2), dass

$$A(y) := \{a \in A : y_a = 1\}$$

azyklisch ist. Insbesondere gibt es wegen (1) in $A(y)$ für jeden Knoten $v \in V$ einen (gerichteten) 1-v-Weg [Konstruktion: rückwärts].

Ferner gilt (wegen der Azyklizität von $A(y)$):

$$(v,w) \in A(y) \Rightarrow (w,v) \notin A(y)$$

Also ist $x \in \{0,1\}^E$ und mit

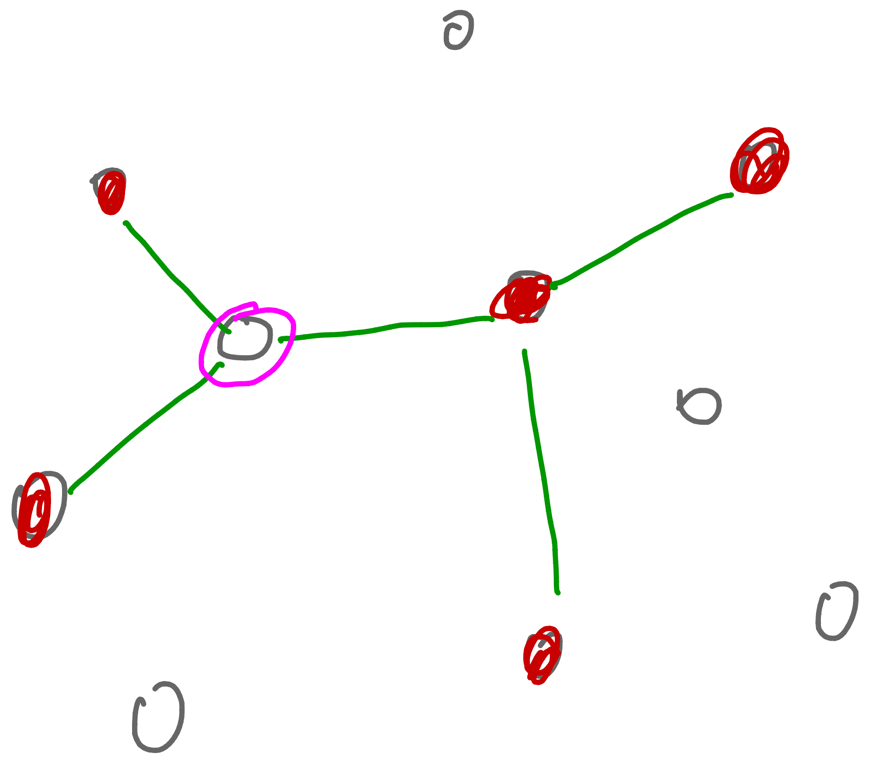
$$E(x) := \{e \in E : x_e = 1\}$$

$$= \{\{v,w\} \in E : vw \in A(y) \text{ oder } wv \in A(y)\}$$

ist $(V, E(x))$ zusammenhängend. Wegen (1) und (2) und der Azyklizität von $A(y)$ ist $E(x)$ auch kreisfrei, also ein Spannbaum.

[53]

Terminals S



G = vollständiger Graph

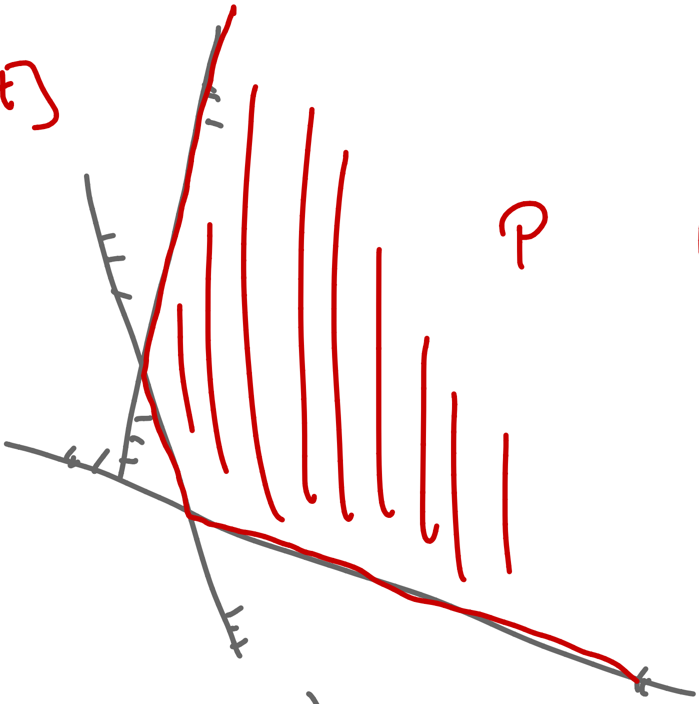
$w \in \mathbb{Q}^{E(G)}$: (gerundete) Euklidische Distanz

<u>Modellierungsmöglichkeit</u>

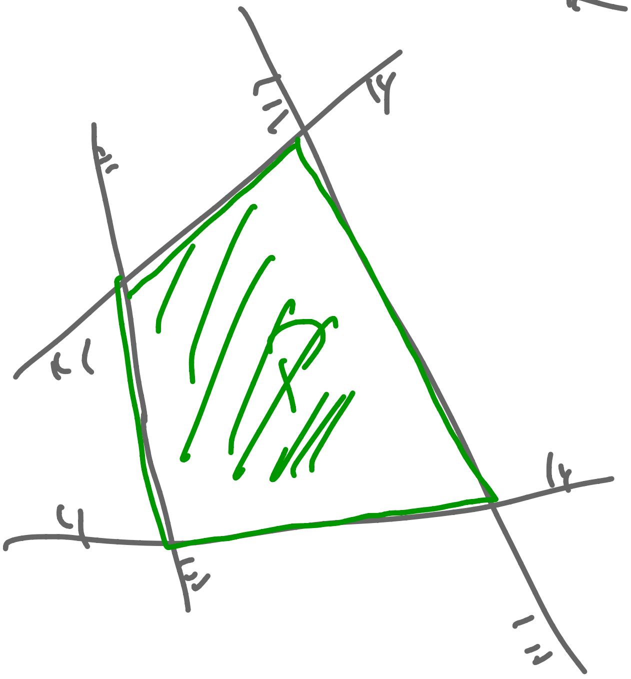
Die positiven $w_e > 0$ $(e \in E(G))$ sind die optimalen Steiner-Bäume genau die optimalen ausfallsicheren Netzwerke mit Ausfallsicherheitsanforderungen:

$$\alpha_{s,t} = 0 \qquad \forall s,t \in S$$

[54]

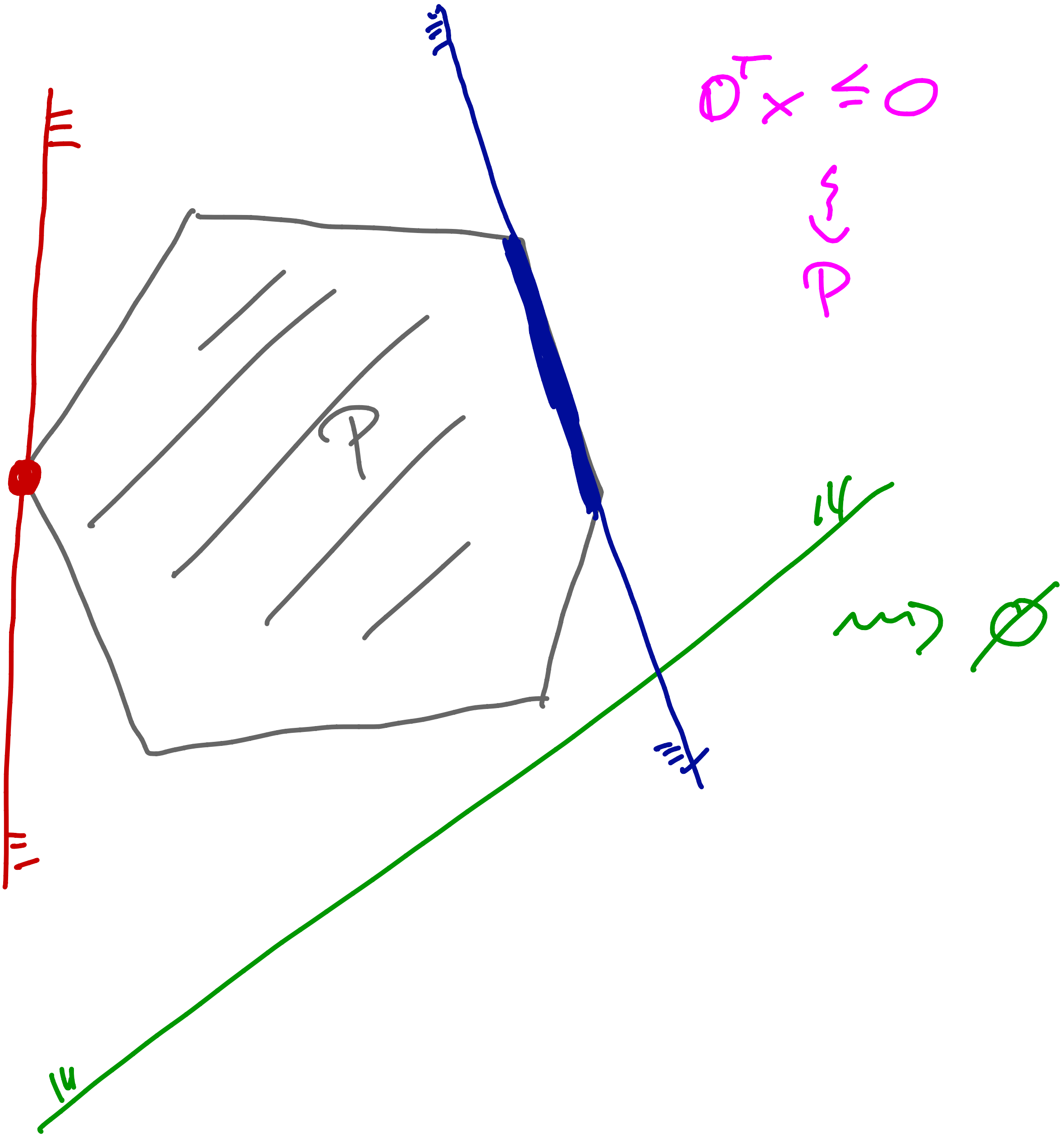


P (unbeschränkt)

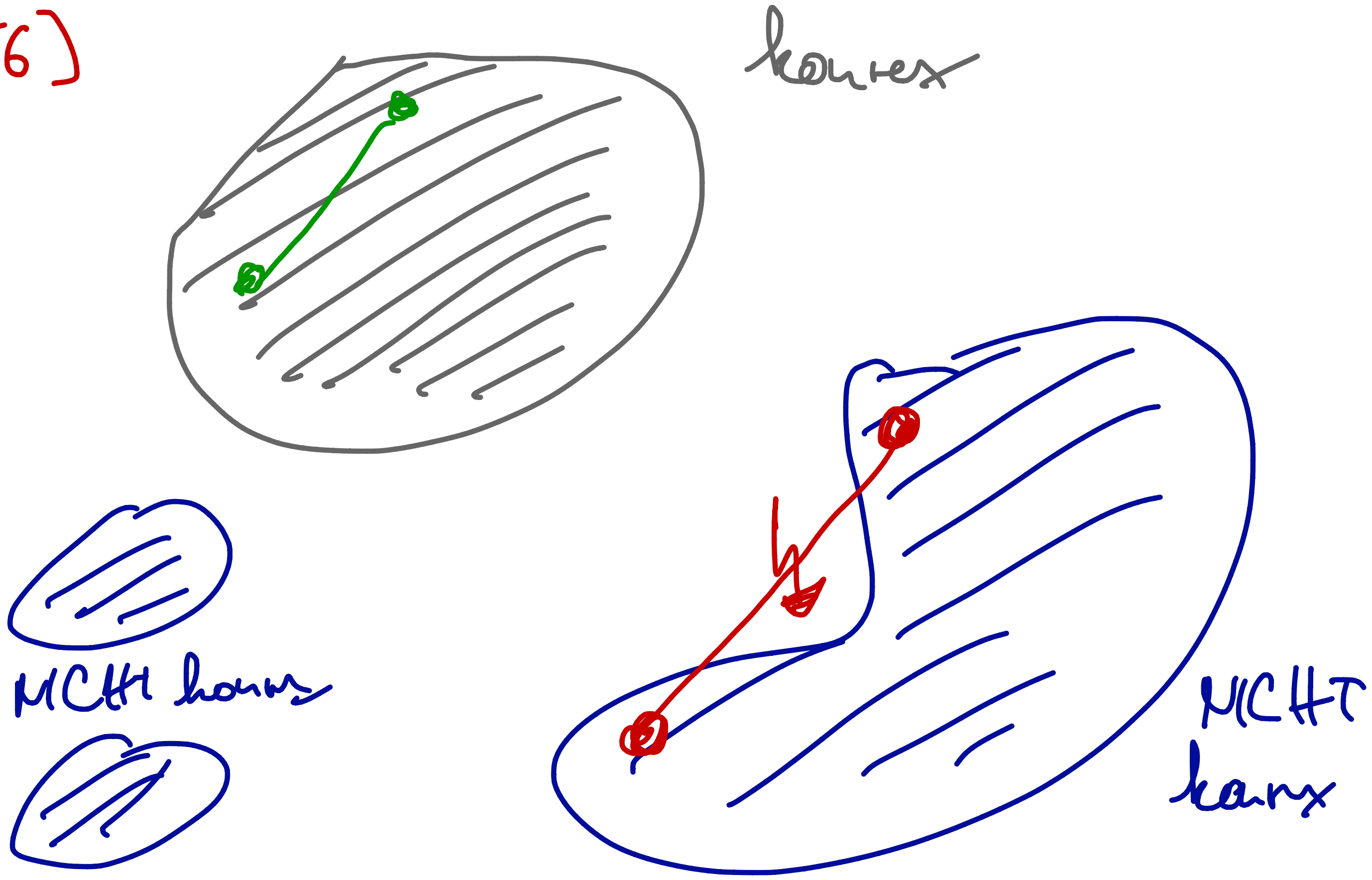


P Polytop

[55]



[56]



[56] Erfüllen x^1 und x^2 $Ax \leq b$,
so gilt für alle

$$\bar{x} = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \quad (\lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0)$$

$$A\bar{x} = \underbrace{\lambda_1}_{\geq 0} \underbrace{Ax^1}_{\leq b} + \underbrace{\lambda_2}_{\geq 0} \underbrace{Ax^2}_{\leq b} \leq \lambda_1 \cdot b + \lambda_2 \cdot b = b$$