VL 3 (19.4.16)

MODELLIERUNG 1
(V. KAIBEL, OVGU MD)

[8] Modellierung als IP

Variablen: $x_{\{i,j\}} \in \{0,1\}$ $\left(\text{für alle } \{i,j\} \in \binom{[n]}{2}\right)$

$1 \Leftrightarrow$ i und j teilen sich ein Büro

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $[n] = \{1,\dots,n\}$

Modell:

$$\min \sum_{\{i,j\} \in \binom{[n]}{2}} w_{\{i,j\}} x_{\{i,j\}}$$

$$\sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} x_{\{i,j\}} = 1 \quad \forall i \in [n]$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{\{i,j\}} \geq 0 \\ x_{\{i,j\}} \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \forall_{\{i,j\} \in \binom{[n]}{2}}$$

Einschub: $\binom{n}{k}$ = Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

[8]

[9] Modellierung als IP

Variablen:

$x_{ij} \in \{0,1\}$: Job j wird unmittelbar nach Job i ausgeführt

$p_i \in \{1,2,\dots,n\}$: Position von Job i in der Reihenfolge

Modell:

$$\sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} t_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\sum_{j\in[n]\setminus\{1,i\}} x_{ij} = 1 \quad \forall i\in[n-1] \qquad (1)$$

$$\sum_{i\in[n-1]\setminus\{j\}} x_{ij} = 1 \quad \forall j\in[n]\setminus\{1\} \qquad (2)$$

$$n\cdot x_{ij} - (p_j - p_i) \le n-1 \quad \forall i\in[n-1]\ \forall j\in[n]\setminus\{1,i\} \qquad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i\in[n-1]\ \forall j\in[n]\setminus\{1,i\}$$

$$p_1 = 1, \quad p_n = n$$

$$2 \le p_i \le n-1 \quad \forall i\in\{2,\dots,n-1\}$$

$$p_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i\in\{2,\dots,n-1\} \qquad (4)$$

Zur Korrektheit des Modells

Betrachte eine beliebige Reihenfolge der Jobs (mit Job 1 an erster und Job n an letzter Position). Seien $p_1, \ldots, p_n \in [n]$ die Positionen der Jobs bzgl. dieser Reihenfolge und sei für alle $i \in [n-1]$, $j \in [n] \setminus \{1, i\}$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } p_j = p_i + 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $\sum_{\substack{i \in [n-1] \\ j \in [n] \setminus \{1, i\}}} t_{ij} x_{ij}$ ist offensichtlich die Summe der Umrüstzeiten für diese Reihenfolge.

Die Bedingungen (4) sind offenbar erfüllt.

Die Bedingungen (1)/(2) gelten, weil jeder Job außer n bzw. 1 genau einen unmittelbaren Nachfolger bzw. Vorgänger hat.

Zur Überprüfung von Bedingung (3) nehmen wir eine Fallunterscheidung vor:

$x_{ij} = 0$: (3) erfüllt, weil $|p_j - p_i| \leq n-1$
wegen $1 \leq p_i, p_j \leq n$.

$x_{ij} = 1$: (3) erfüllt, weil dann
$p_j = p_i + 1$ ist, also:
$n \cdot 1 - (p_i + 1 - p_i) = n-1$