VL 4 (26.4.16)

MODELLIERUNG 1
(V. KAIBEL, OVGU MD)

Erfülle nun umgekehrt (x,p) (1)-(4).
Wir müssen zeigen, dass $i \longmapsto p_i$ eine Bijektion definiert (also p eine Reihenfolge ist) mit $x_{ij} = 1 \iff p_j = p_i + 1$.
Wegen (1) gibt es für jedes $i \in [n-1]$ genau ein $j =: s(i) \in [n] \setminus \{1, i\}$ mit $x_{ij} = 1$.
Wegen (2) ist die Abbildung $s: [n-1] \to [n] \setminus \{1\}$ injektiv. Wir konstruieren die Folge

$$J(1) := 1, \quad J(2) := s(J(1)), \quad J(3) := s(J(2)), \dots,$$

welche wegen der Injektivität von s und $s(1) \neq 1$ mit $J(k) = n$ abbricht (für ein k). Angenommen, $k < n$. Dann wähle ein $i \in [n] \setminus \{J(1), \dots, J(k)\}$ und konstruiere

$$\tilde{J}(1) := i, \quad \tilde{J}(2) := s(\tilde{J}(1)), \tilde{J}(3) := s(\tilde{J}(2)), \dots,$$

welche nur beim ersten Index $\tilde{k} > 1$ abbrechen, bei dem $\tilde{J}(\tilde{k}) = \tilde{J}(1)$ ist
[Wegen der Injektivität von s und $s(i) \neq i$ existiert $\tilde{k} > 1$ mit $\tilde{J}(\tilde{k}) = \tilde{J}(1)$.]

Summieren wir nun die Ungleichungen (3) für $(i,j) = (\tilde{j}(1), \tilde{j}(2)), (\tilde{j}(2), \tilde{j}(3)), \ldots$
$$(\tilde{j}(\tilde{k}-2), \tilde{j}(\tilde{k}-1)), (\tilde{j}(\tilde{k}-1), \underbrace{\tilde{j}(\tilde{k})}_{= \tilde{j}(1)}),$$

so erhalten wir

$$\underbrace{(\tilde{k}-1)}_{>0} \cdot n - 0 \leq \underbrace{(\tilde{k}-1)}_{>0} \cdot (n-1),$$

also den Widerspruch $n \leq n-1$.
Daher ist $k = n$ und $[n] \to [n], i \mapsto j(i)$ ist eine Bijektion. Die $n-1$ x_{ij}-Variablen, die Wert 1 haben, sind per Konstruktion

$$x_{j(1),j(2)}, x_{j(2),j(3)}, \ldots, x_{j(n-1),j(n)} \tag{5}$$

Wegen (3) gilt insbesondere

$$\underbrace{p_{j(1)}}_{1} < p_{j(2)} < p_{j(3)} < \cdots < p_{j(n-1)} < \underbrace{p_{j(n)}}_{n}$$

Wegen $p_i \in [n]$ $\forall i \in [n]$ ist also

$$p_1 = 1, \; p_{J(2)} = 2, \; p_{J(3)} = 3, \; \dots, \; p_{J(n-1)} = n-1, \; p_n = n.$$

Also ist $i \mapsto p_i$ die Umkehr-Bijektion von J und $x_{ij} = 1 \iff p_j = p_i + 1$.

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\underset{p_i}{\parallel}}{J^{-1}(i)} = \underset{\underset{p_j}{\parallel}}{J^{-1}(j)} - 1$$

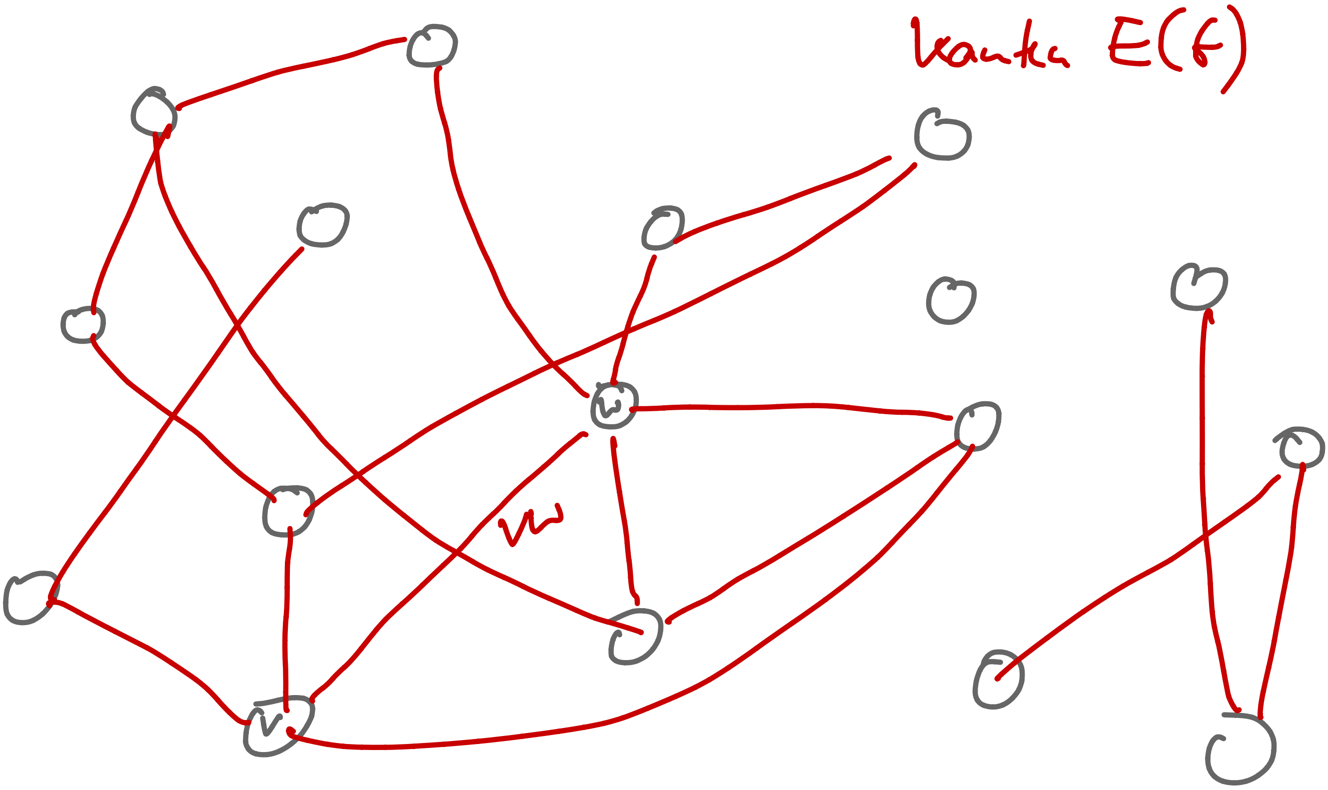
$\blacksquare$

[10]

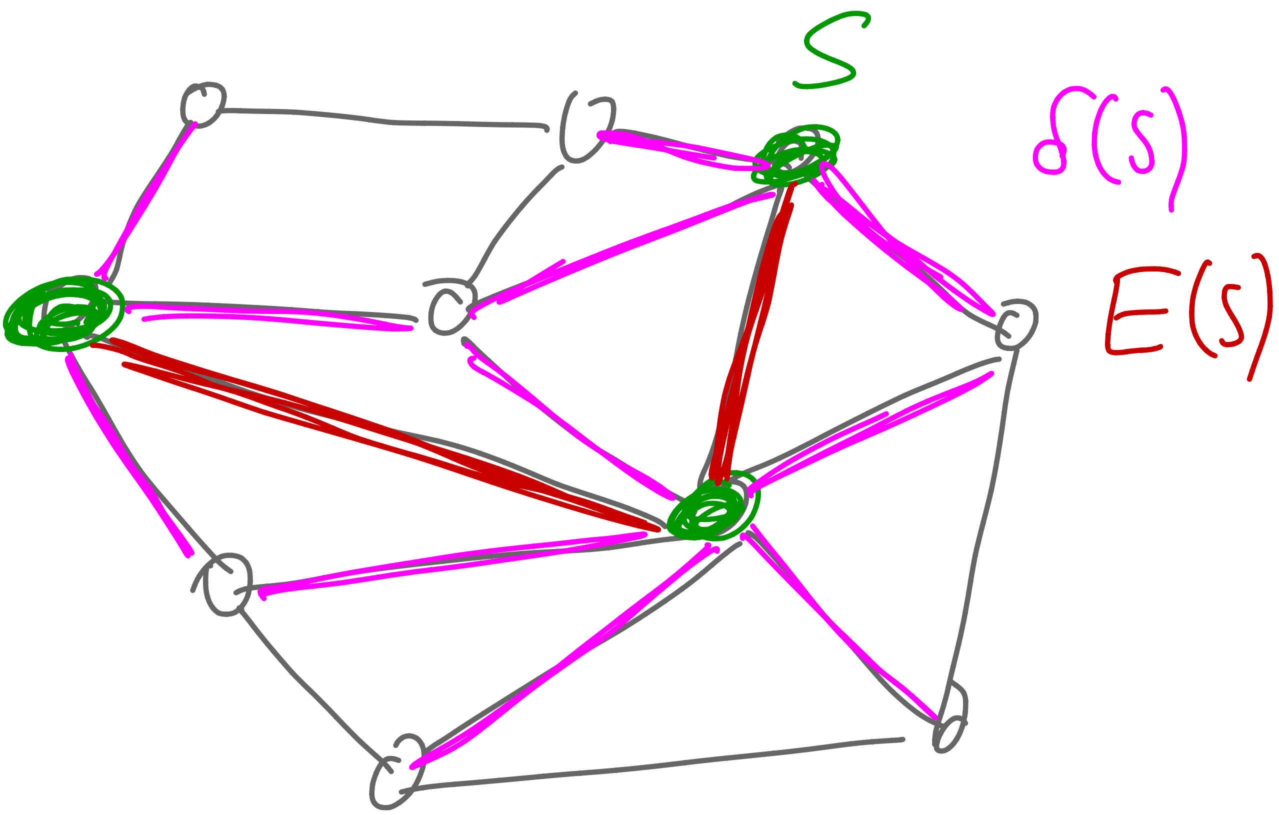
Visualisierung des Graphen G

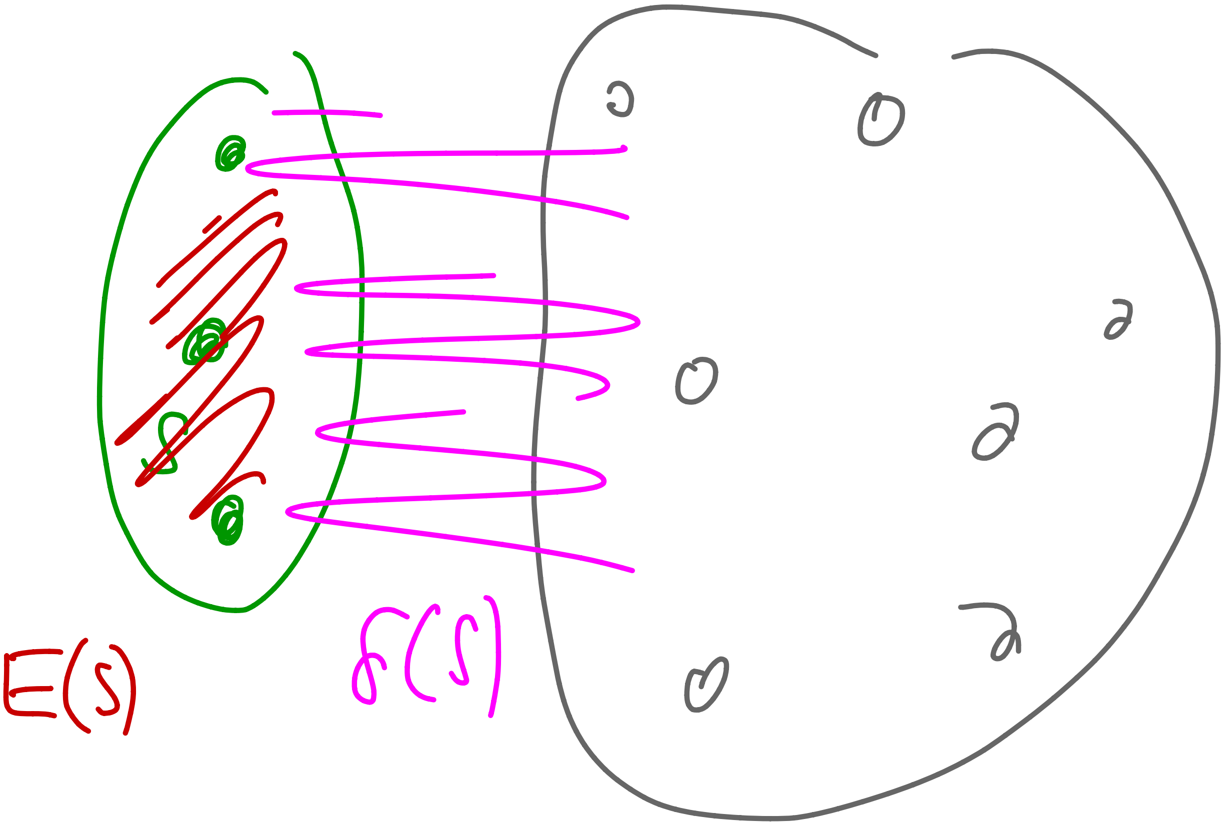
Knoten $V(G)$

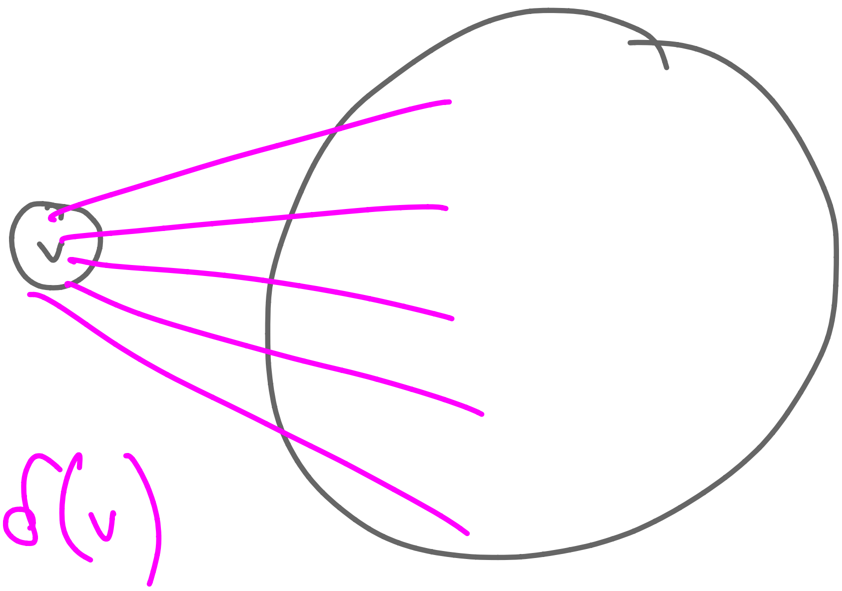
Kanten $E(G)$



[11]







Stern von v

$\deg(v) = 5$

[11]

[12] Argument: "double-counting"

$$\left|\{(v,e) : v\in V(G), e\in E(G), v\in e\}\right|$$

$$= \sum_{v^*\in V(G)} \deg(v^*) \quad \text{with} \quad \deg(v^*) = \left|\{(v^*,e) : e\in E(G), v^*\in e\}\right|$$

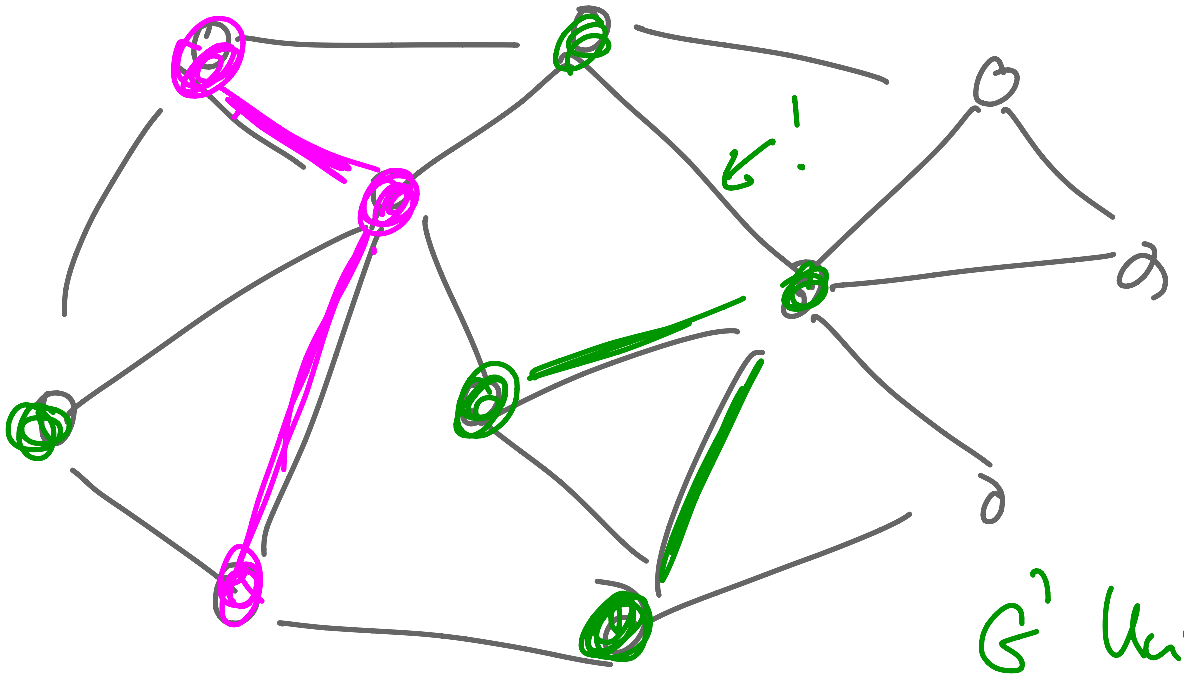
$$= \sum_{e^*\in E(G)} 2 \quad \text{with} \quad 2 = \left|\{(v,e^*) : v\in V(G), v\in e^*\}\right|$$

$$\Longrightarrow \sum_{v\in V(G)} \deg(v) = 2\,|E(G)| \in 2\mathbb{Z}$$

Da müssen gerade viele ungerade Summanden stehen.

[13, 14]

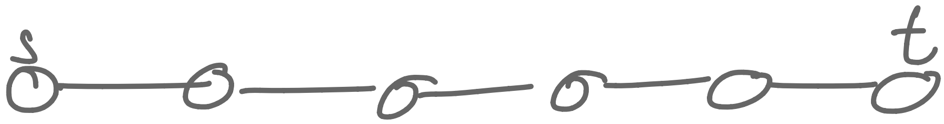
G



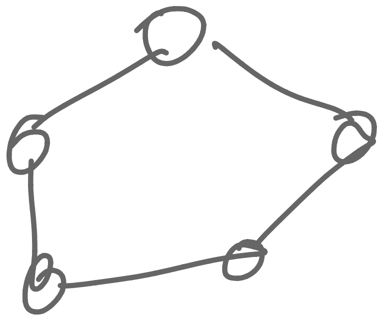
G'' induzierter Untergraph von G

G' Untergraph von G (nicht induziert)

[15]

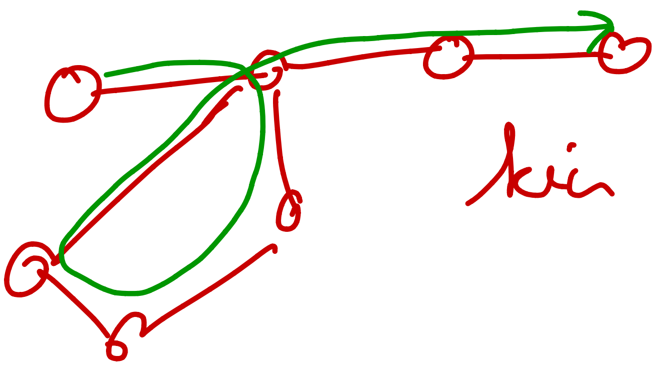


s-t-Weg



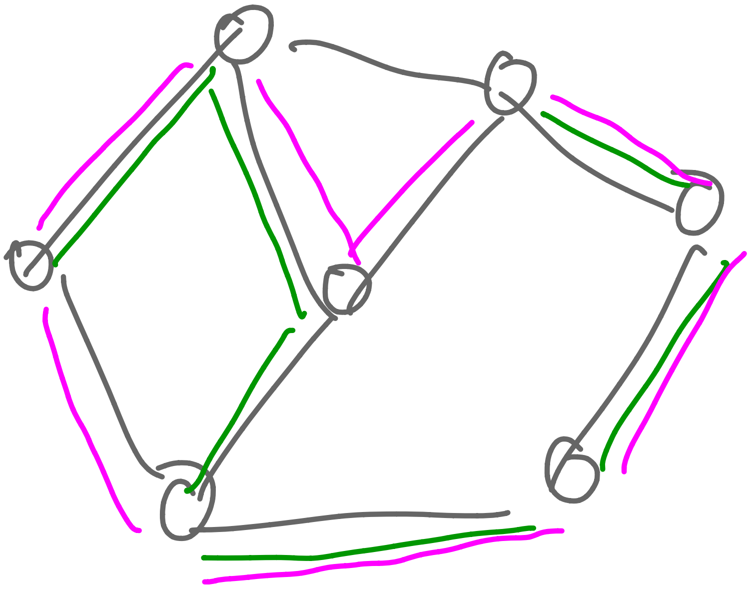
Kreis

Achtung:



kein Weg!

[16]



W : Hamiltonscher Weg

K : Hamiltonscher Kreis

(müssen nicht existieren)

Der Graph $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$ (für $n \in \mathbb{N}$) heißt der <u>vollständige</u> Graph auf n Knoten.

$$\# \text{ Hamilton-Kreise in } K_n = \frac{1}{2}(n-1)!$$

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \approx \frac{n^n}{e^n} = e^{n(\ln n - 1)}$$

Für große n: $\quad 2^n \ll n! \ll 2^{n^2}$