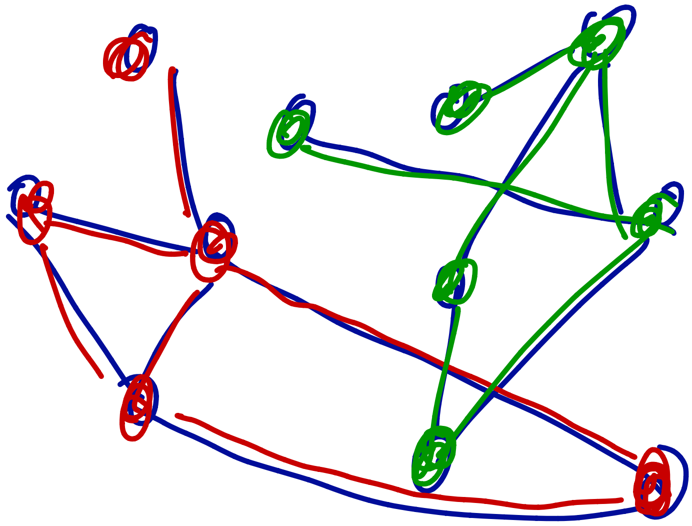
VL 5 (3.5.16)

MODELLIERUNG 1
(V. KAIBEL, OVGU MD)

[17]

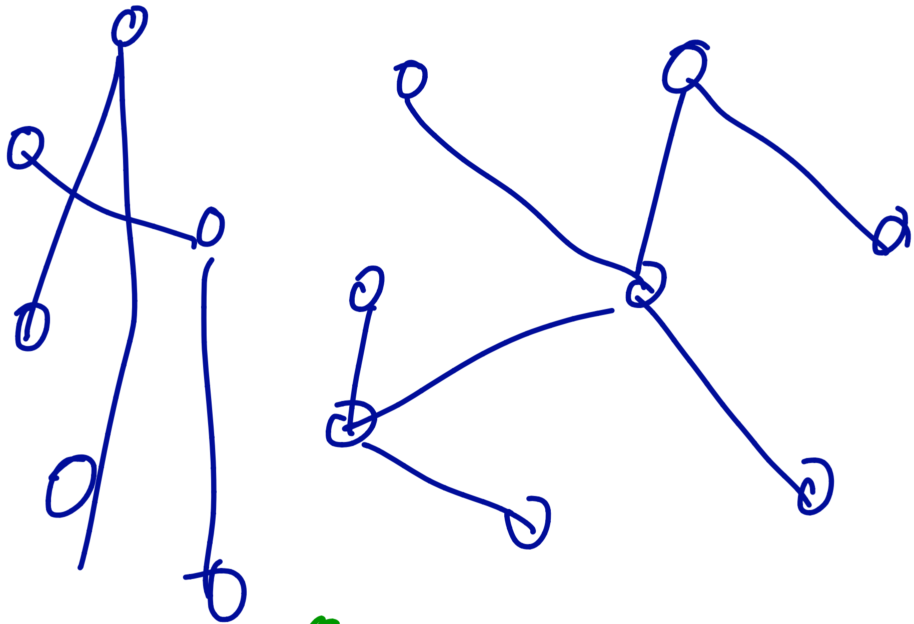
G



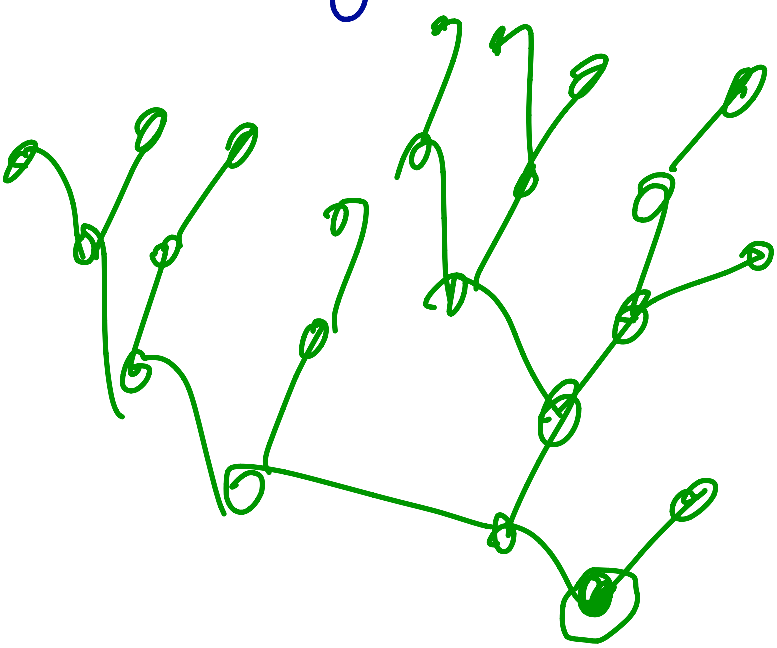
G_2

G_1

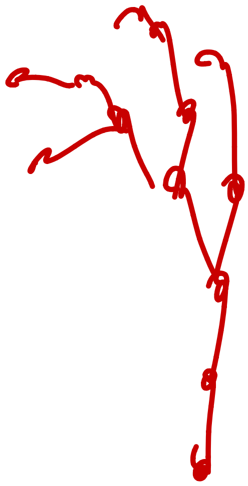
[18]



Wald G



Baum G'



Baum G''

[19] <u>Begründung</u>:

$$W := \{ F \subseteq E(G) : F \text{ Weg} \}$$

Sei $F^* \in W$ so, dass gilt:

$$\forall_{F \in W} : (F^* \subseteq F \Rightarrow F^* = F)$$

"F^* ist inklusionsmaximal in W"

(Existenz wegen Endlichkeit)

Dann müssen die beiden Endknoten von F^* wegen der Maximalität von F^* Grad 1 haben (sonst könnte man F^* verlängern).

[20] Beweis zu Satz 1

"1. ⇒ 2.": Es gelte 1. ("G ist Baum"); um 2. zu zeigen, seien $s, t \in V(G)$ $(s \neq t)$.
Da G zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen s-t-Weg in G. Sind $W_1, W_2 \subseteq E(G)$ s-t-Wege, so hat im Untergraphen $H := (V(G), W_1 \triangle W_2)$ mit $W_1 \triangle W_2 := (W_1 \setminus W_2) \cup (W_2 \setminus W_1) = (W_1 \cup W_2) \setminus (W_1 \cap W_2)$ ("symmetrische Differenz") jeder Knoten geraden Grad; denn für alle $v \in V(G)$ gilt:

$$\deg_{W_1}(v) \equiv \deg_{W_2}(v) \mod 2 \qquad (*)$$

$$\deg_{W_1 \triangle W_2}(v) \equiv \deg_{W_1}(v) + \deg_{W_2}(v) \mod 2$$

$$\underset{(*)}{\equiv} 0 \mod 2$$

Da G azyklisch ist, muss also $W_1 \triangle W_2 = \emptyset$ sein, d.h. $W_1 = W_2$.

"2. ⇒ 3.": Es gelte 2. für G.

Offenbar ist G zusammenhängend. Für jede Kante $e = vw \in E(G)$ gibt es in $E(G) \setminus \{e\}$ keinen v-w-Weg, weil e der eindeutige v-w-Weg in G ist, also ist $E(G) \setminus \{e\}$ nicht zusammenhängend.

"3. ⇒ 4.": Es gelte 3. für G.

Hätte G einen Kreis $K \subseteq E(G)$, so wäre für eine beliebige Kante $e \in K$ der Untergraph $(V(G), E(G) \setminus \{e\})$ zusammenhängend, da für jeden s-t-Weg $W \subseteq E(G)$ mit $e \in W$ die Menge $(W \setminus \{e\}) \cup (K \setminus \{e\})$ einen s-t-Weg enthält.

Ist $\bar{e} = vw \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$, da G zusammenhängend ist existiert ein v-w-Weg $W \subseteq E(G)$, also ist $W \cup \{\bar{e}\}$ ein Kreis in $E(G) \cup \{\bar{e}\}$.

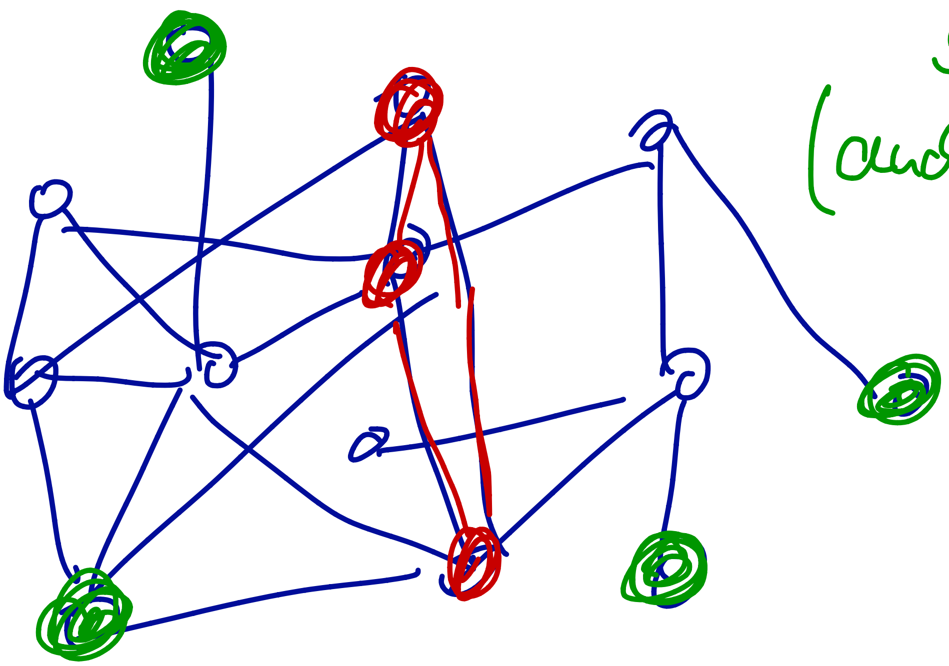
"4. ⇒ 1." Es gelte 4. für G.

Seien $s, t \in V(G)$ $(s \neq t)$; zu zeigen ist, dass es einen s-t-Weg in G gibt.

Ist $st \in E(G)$, so ist das klar.

Andernfalls sei $K \subseteq E(G) \cup \{st\}$ ein Kreis; da G azyklisch ist, muss $st \in K$ sein, also ist $K \setminus \{st\} \subseteq E(G)$ ein s-t-Weg. $\boxtimes$

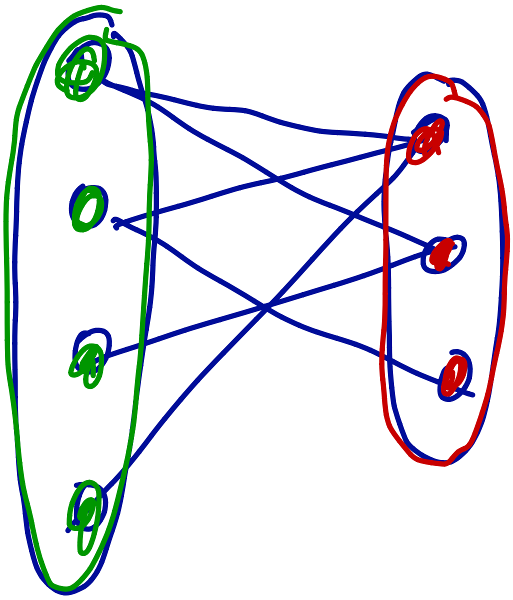
[21]

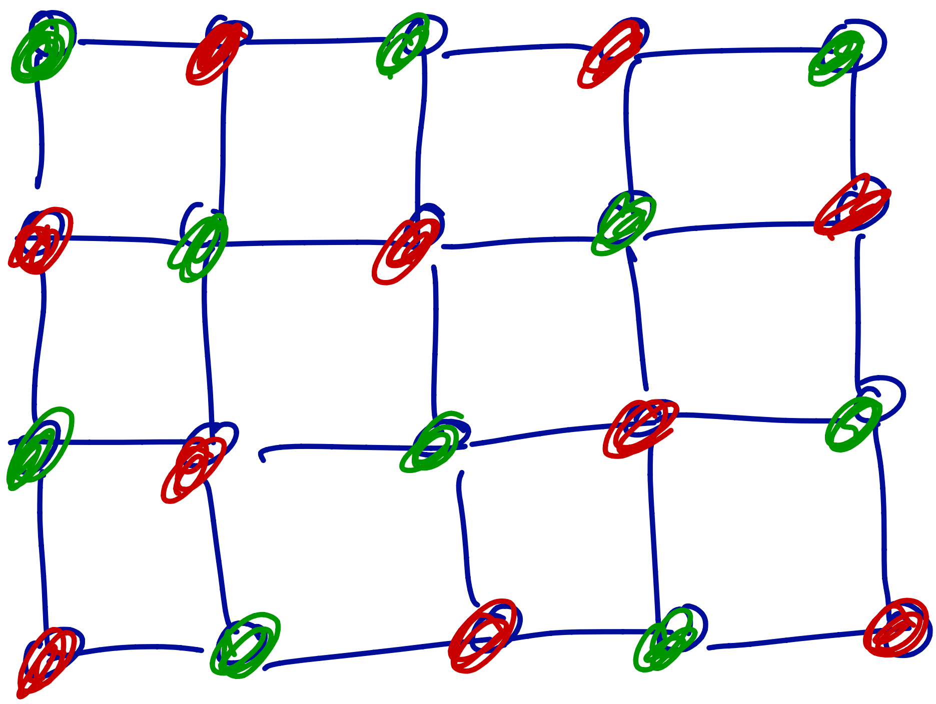


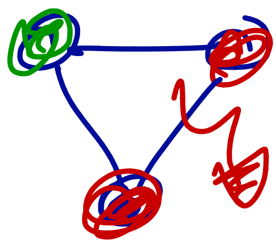
stabile Menge (auch: „unabhängig")

Clique

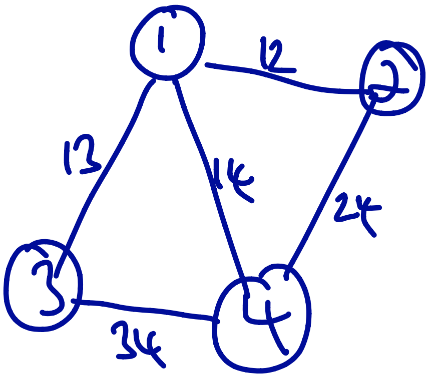
[22]







[23]



G

Inc(G)

E(G)

V(G)	12	13	14	24	34
1	1	1	1	0	0
2	1	0	0	1	0
3	0	1	0	0	1
4	0	0	1	1	1