

3.6 Steiner Bäume

Gegeben:

- Graph G
- Kantengewichte $w \in \mathbb{Q}_+^{E(G)}$
- Teilmenge $S \subseteq V(G)$ (*Terminals*)

Gesucht:

Ein Untergraph H von G , der ein Baum mit $S \subseteq V(H)$ ist, mit möglichst geringem Gewicht $w(H) = \sum_{e \in E(H)} w_e$.

Kapitel 4

MILP: Struktur und Algorithmen

4.1 Lineare Optimierung und Polyeder

(Kontinuierliche) Lineare Optimierung
=
Linear Programming (LP)

Eingabe:

$$A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, b \in \mathbb{Q}^m, c \in \mathbb{Q}^n$$

Zulässige Lösungen:

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

Aufgabe: Finde *Optimallösung* $x^{\text{opt}} \in P$ mit

$$\langle c, x^{\text{opt}} \rangle = \max\{\langle c, x \rangle : x \in P\}$$

Definition. Ein **Polyeder** ist die Lösungsmenge eines endlichen Systems von linearen Gleichungen und Ungleichungen. Ein **Polytop** ist ein Polyeder P , das beschränkt ist (d.h. es gibt $B \in \mathbb{R}$, so dass $\|x\| \leq B$ für all $x \in P$ gilt).

Bemerkung. Wir betrachten hier nur beschränkte Polyeder (also Polytope).

Definition. Eine **Seite** (engl.: *face*) eines Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge

$$F = \{x \in P : a^T x = \beta\},$$

wobei $a^T x \leq \beta$ für alle $x \in P$ gilt; man sagt dann, $a^T x \leq \beta$ definiere die Seite F von P .

[55]

Bemerkung. Seiten von Polyedern sind Polyeder.

Satz 8. Jedes Polyeder hat nur endlich viele Seiten.

Definition. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein *affiner Unterraum*, wenn sie mit je zwei Punkten $x^1, x^2 \in A$ auch die Gerade

$$\{\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 : \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

enthält.

Bemerkung. Affine Unterräume sind genau die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen (siehe Lineare Algebra).

Definition. Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten $x^1, x^2 \in A$ auch die Verbindungsstrecke

$$\{\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 : \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$$

enthält.

Bemerkung. Polyeder sind konvex.