

**Definition.** Die *affine Hülle*  $\text{aff}(X)$  einer Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ist der Schnitt aller affinen Unterräume, die  $X$  enthalten.

**Definition.** Die *konvexe Hülle*  $\text{conv}(X)$  einer Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ist der Schnitt aller konvexen Mengen, die  $X$  enthalten.

**Bemerkung.** Affine bzw. konvexe Hüllen sind affine Unterräume bzw. konvexe Mengen.

**Satz 9.** Für jede Menge  $X = \{x^1, \dots, x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  gelten:

$$\text{aff}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i : \sum \lambda_i = 1, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

(*affine Kombinationen von  $X$* )

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i : \sum \lambda_i = 1, \lambda_i \in \geq 0 \right\}$$

(*konvexe Kombinationen von  $X$* )

**Definition.** Die **Dimension**  $\dim(P)$  eines Polyeders  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ist die Dimension seiner affinen Hülle  $\text{aff}(P)$ .

**Definition.** Die 0-, 1-, bzw.  $\dim(P)$ -dimensionalen Seiten eines Polyeders  $P$  heißen seine **Ecken**, **Kanten** bzw. **Facetten**.

[58]

**Satz 10.** Ist  $P$  ein Polytop, so ist genau dann

$$P = \{x \in \text{aff}(P) : Ax \leq b\},$$

wenn  $Ax \leq b$  für jede Facette  $F$  von  $P$  wenigstens eine  $F$  definierende Ungleichung enthält.

**Satz 11** (Satz von Weyl-Minkowski). Jedes Polytop ist die konvexe Hülle seiner (endlich vielen) Ecken. Umgekehrt ist die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten stets ein Polytop.

[59]

**Satz 12.** Ist  $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polytop, so wird für jedes  $c \in \mathbb{R}^n$  das Optimum von

$$\max / \min \{c^T x : x \in P\}$$

in einer Ecke von  $P$  angenommen.

**Satz 13.** Jede Kante eines Polytops ist die konvexe Hülle (Verbindungsstrecke) zweier Ecken des Polytops. Der von den Ecken (Knoten) und Kanten definierte Graph eines Polytops ist zusammenhängend.

## 4.2 Der Simplex-Algorithmus

- Löst (kontinuierliche) lineare Optimierungsprobleme (LP's)
- Sucht zunächst eine Startecke  $v$ .
- Solange  $v$  keine Optimallösung ist wird  $v$  durch eine zu  $v$  über eine Kante benachbarte Ecke mit besserem Zielfunktionswert ersetzt.
- Entscheidend für die Korrektheit: Konvexität (*lokale Optimalität impliziert globale Optimalität*)
- Algorithmische Umsetzung: Pivotalisieren in Tableaus oder andere den Rechenaufwand verringernde Verfahren der Linearen Algebra (*Faktorisierung von Basis-Matrizen,  $\eta$ -updates*)
- Andere relevante Klasse von LP-Algorithmen: *Innere-Punkte-Verfahren*