Definition. *Ein Graph G heißt **zusammenhängend**, wenn es für je zwei Knoten $s, t \in V(G)$ einen s-t-Weg in G gibt.*

Definition. *Die **Komponenten** (auch: **Zusammenhangskomponenten**) eines Graphen sind seine inklusionsmaximalen zusammenhängenden induzierten Untergraphen.*

[17]

Definition. *Ein Graph heißt **azyklisch** oder ein **Wald**, wenn er keinen Kreis enthält (d.h. wenn keiner seiner Untergraphen ein Kreis ist). Ein zusammenhängender Wald heißt **Baum**.*

[18]

Bemerkung. *In jedem azyklischen Graph G mit $E(G) \neq \varnothing$ gibt es wenigstens zwei Knoten vom Grad Eins.*

[19]

Satz 1. *Die folgende Aussagen sind paarweise äquivalent für Graphen G:*

1. *G ist ein Baum.*
2. *Für je zwei Knoten $s, t \in \mathrm{V}(G)$ ($s \neq t$) gibt es genau einen s-t-Weg in G.*
3. *G ist zusammenhängend, aber für alle Kanten $e \in \mathrm{E}(G)$ von G ist $(\mathrm{V}(G), \mathrm{E}(G) \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.*
4. *G ist azyklisch, aber für alle Nicht-Kanten $\bar{e} \in \binom{\mathrm{V}(G)}{2} \setminus \mathrm{E}(G)$ von G enthält $(\mathrm{V}(G), \mathrm{E}(G) \cup \{\bar{e}\})$ einen Kreis.*

[20]

Korollar 2.
1. *Jeder zusammenhängende Graph enthält einen spannenden Baum.*
2. *Jeder Baum T hat genau $|\mathrm{V}(T)| - 1$ Kanten.*

(Beweis: Übungen)

Definition. *Sei G ein Graph.*

- *Eine Knotenmenge $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ heißt eine* ***stabile Menge*** *in G, wenn $\mathrm{E}_G(S) = \varnothing$ ist.*
- *Eine Knotenmenge $K \subseteq \mathrm{V}(G)$ heißt eine* ***Clique*** *in G, wenn $\mathrm{E}_G(K) = \binom{K}{2}$ gilt.*

[21]

Definition. *Ein Graph heißt* ***bipartit****, wenn es eine Partitionierung seiner Knotenmenge in zwei stabile Mengen gibt.*

[22]

Satz 3. *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.*

(Beweis: Übungen)

Definition. *Die* ***Inzidenzmatrix*** *eines Graphen G ist die Matrix $\mathrm{Inz}(G) \in \{0,1\}^{\mathrm{V}(G) \times \mathrm{E}(G)}$ mit*

$$\mathrm{Inz}(G)_{v,e} = \begin{cases} 1 & \textit{falls } v \in e \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}.$$

[23]

Satz 4. *Der Rang der Inzidenzmatrix eines Graphen G ist $|\mathrm{V}(G)|$ minus der Anzahl der bipartiten Komponenten von G.*

(Beweis: Übungen)