## 2.2 Gerichtete Graphen

**Definition.** *Ein einfacher **gerichteter Graph** (auch: **Digraph** = directed graph) ist ein Paar $D = (V, A)$ mit einer (hier) endlichen Menge $V$ und einer Menge*

$$A \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) : v \in V\}$$

*von geordneten Paaren von Elementen aus $V$.*

- $\mathrm{V}(D) := V$ *: Menge der **Knoten** von $D$*
- $\mathrm{A}(D) := A$ *: Menge der **Bögen** (Kanten) von $D$*

*Für $a = (v, w) \in A$:*

- *Alternative Schreibweise: $a = vw$*
- *$v$ heißt **Anfangsknoten (tail)** von $a$.*
- *$w$ heißt **Endknoten (head)** von $a$.*
- *$a$ ist eine **Aus-Bogen** von $v$.*
- *$a$ ist eine **Ein-Bogen** von $w$.*
- *$w$ ist **Aus-Nachbar** von $v$.*
- *$v$ ist **Ein-Nachbar** von $w$.*

[28]

**Definition.** *Sei D ein Digraph.*

- *Für* $S \subseteq \mathrm{V}(D)$ *heißt*

$$\delta^{\mathrm{aus}}(S) := \delta_D^{\mathrm{aus}}(S) := \mathrm{A}(D) \cap (S \times (\mathrm{V}(D) \setminus S))$$

*der von S induzierte* ***Schnitt***

- *Für* $v \in \mathrm{V}(D)$ *heißen*

$$\delta^{\mathrm{aus}}(v) := \delta_D^{\mathrm{aus}}(v) := \mathrm{A}(D) \cap (\{v\} \times \mathrm{V}(D))$$

*und*

$$\delta^{\mathrm{ein}}(v) := \delta_D^{\mathrm{ein}}(v) := \mathrm{A}(D) \cap (\mathrm{V}(D) \times \{v\})$$

*der* ***Aus-Stern*** *bzw.* ***Ein-Stern*** *von* $v$.

[29]

**Definition.** *Ein Graph* $D'$ *ist* ***Unterdigraph*** *(**Subdigraph**) eines Digraphen D, wenn* $\mathrm{V}(D') \subseteq \mathrm{V}(D)$ *und* $\mathrm{A}(D') \subseteq \mathrm{A}(D)$ *gelten; ist sogar* $\mathrm{V}(D') = \mathrm{V}(D)$*, so ist* $D'$ *ein* ***spannender Unterdigraph*** *von D.*

[30]

**Definition.** *Für einen Graphen D und* $U \subseteq \mathrm{V}(D)$ *ist* $D[U] := (U, \mathrm{A}(D) \cap (U \times U))$ *der von U* ***induzierte Unterdigraph*** *von D.*

[31]

**Definition.** *Ein **gerichteter Weg** ist ein Digraph P mit Knotenmenge* $\mathrm{V}(P) = \{v_0, \dots, v_k\}$ *($k \geq 0$) mit paarweise verschiedenen* $v_0, \dots, v_k$ *und Bogenmenge*

$$\mathrm{A}(P) = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)\};$$

*seine **Länge** ist k. P ist ein s-**t-Weg**, wenn* $v_0 = s$ *und* $v_k = t$ *sind.*

**Definition.** *Ein **gerichteter Kreis** ist ein Digraph C mit Knotenmenge* $\mathrm{V}(C) = \{v_1, \dots, v_k\}$ *($k \geq 2$) mit paarweise verschiedenen* $v_1, \dots, v_k$ *und Bogenmenge*

$$\mathrm{A}(C) = \{(v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)\};$$

*seine **Länge** ist k.*

[32]

**Definition.** *Sei D ein Digraph. Ein **Weg/Kreis in** D ist ein Unterdigraph H von D, der ein gerichteter Weg/Kreis ist.*

**Bemerkung.**

- *Ein Weg/Kreis in einem Digraphen D, der ein spannender Untergraph von D ist, heißt **hamiltonisch**.*

- *Eine Bogenteilmenge* $F \subseteq \mathrm{A}(D)$ *eines Digraphen D identifizieren wir oft mit dem Unterdigraphen* $(\mathrm{V}(F), F)$ *von D, wobei* $\mathrm{V}(F) \subseteq \mathrm{V}(D)$ *die Menge aller Knoten sei, die Anfangs- oder Endknoten von wenigstens einem Bogen aus F sind.*

[33]

**Definition.** *Ein Digraph D heißt* ***stark zusammenhängend****, wenn es für je zwei Knoten* $s, t \in \mathrm{V}(D)$ *einen s-t-Weg in D gibt.*

**Definition.** *Die* ***starken Zusammenhangskomponenten*** *eines Digraphen sind seine inklusionsmaximalen stark zusammenhängenden induzierten Untergraphen.*

[34]

**Definition.** *Der* ***zugrunde liegende ungerichtete Graph*** *eines Digraphen D ist der Graph* $(\mathrm{V}(D), E)$ *mit*

$$\{v, w\} \in E \Leftrightarrow ((v, w) \in \mathrm{A}(D) \textit{ oder } (w, v) \in \mathrm{A}(D)).$$

**Definition.** *Die* ***schwachen Zusammenhangskomponenten*** *eines Digraphen sind die von den Knotenmengen der Komponenten seines unterliegenden ungerichteten Graphen induzierten Unterdigraphen.*

[35]

**Definition.** *Ein Digraph heißt* ***azyklisch****, wenn er keinen Kreis enthält (d.h. wenn keiner seiner Untergraphen ein gerichteter Kreis ist).*

[36]

**Bemerkung.** *In jedem azyklischen Digraphen G mit* $\mathrm{V}(D) \neq \varnothing$ *gibt es wenigstens einen Knoten mit Ausgrad Null und wenigstens einen Knoten mit Eingrad Null.*

[37]

**Definition.** *Die **Inzidenzmatrix** eines Digraphen $D$ ist die Matrix* $\operatorname{Inz}(D) \in \{0,1\}^{\mathrm{V}(D)\times \mathrm{A}(D)}$ *mit*

$$\operatorname{Inz}(D)_{v,a} = \begin{cases} 1 & \textit{falls } a \in \delta^{\mathrm{ein}}(v) \\ -1 & \textit{falls } a \in \delta^{\mathrm{aus}}(v) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} .$$

[38]

**Satz 5.** *Der Rang der Inzidenzmatrix eines Digraphen $D$ ist $|\mathrm{V}(D)|$ minus der Anzahl der schwachen Zusammenhangskomponenten von $G$.*

[39]

**Definition.** *Ein **Netzwerk** ist ein Digraph $D$ zusammen mit **unteren** (lower) und **oberen** (upper) **Kapazitäten***

$$\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^{\mathrm{A}(D)} \quad \textit{bzw.} \quad u \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^{\mathrm{A}(D)}$$

*auf den Bögen mit $\ell \leq u$; die unteren Kapazitäten sind $\ell = \mathbb{O}$, falls sie nicht angegeben werden.*

[40]

**Definition.** *In einem Netzwerk mit Digraph $D$ und unteren und oberen Kapazitäten $\ell$ bzw. $u$ ist*

$$\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}(D)} : \mathrm{Inz}(D)x = \mathbb{O}, \ell \leq x \leq u\}$$

*die Menge der **Zirkulationen**.*

[41]

**Definition.** *Seien $A$ eine endliche Menge und $B \subseteq A$, Für $x \in \mathbb{R}^A$ sei*

$$X(B) := \sum_{b \in B} x_b \,.$$

[42]

**Definition.** *In einem Netzwerk mit Digraph $D$, (oberen) Kapazitäten $u$, einer **Quelle** $s \in \mathrm{V}(D)$ und einer **Senke** $t \in \mathrm{V}(D)$ (mit $s \neq t$) ist*

$$\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}(D)} : \mathrm{Inz}(D)x = e(s,t), \mathbb{O} \leq x \leq u\}$$

*die Menge der $s$-$t$-**Flüsse**, wobei $e(s,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{V}(D)}$ der Vektor mit $-1$ in Komponente $s$, $1$ und Komponente $t$, und $0$ in allen übrigen Komponenten ist; der **Wert** eines Flusses $x$ ist $x(\delta^{\mathrm{aus}}(s)$ $(= x(\delta^{\mathrm{ein}}(t))$.*

[43]