MBD 12.6.17 [11]

Lemma MTZ [Miller, Tucker, Zemlin 1960]

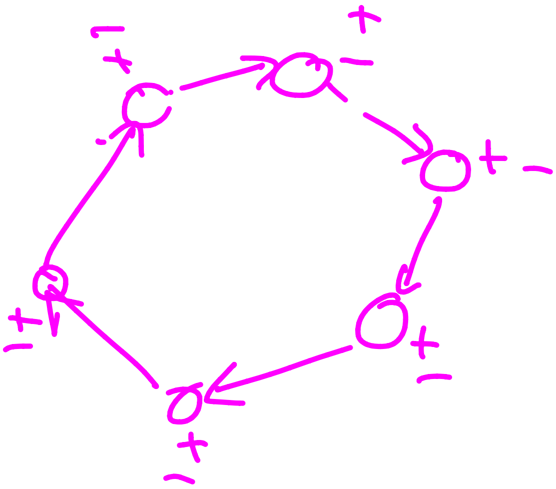
Erfüllen $(\bar{x}, \bar{y})$ (*) und $\bar{x} \in \{0,1\}^{A(D)}$, so enthält in der von $\bar{x}$ repräsentierten Bogenmenge

$$A(\bar{x}) := \{a \in A(D) : \bar{x}_a = 1\}$$

jeder (gerichtete) Kreis den Knoten 1.

Beweis: Angenommen, $K \subseteq A(\bar{x})$ wäre ein Kreis mit Knotenmenge $V(K)$ und $1 \notin V(K)$. Dann ist für jedes $(v,w) \in K$ die Ungleichung (*) für $(\bar{x}, \bar{y})$ gültig. Summiert man alle diese Ungleichungen auf erhält man:

$$\underbrace{\sum_{(v,w)\in K} \left(n\cdot \underbrace{\bar{x}_{vw}}_{1} - (\bar{y}_w - \bar{y}_v)\right)}_{n\cdot|K| - \underbrace{\sum_{(v,w)\in K}(\bar{y}_w - \bar{y}_v)}_{0}} \le \underbrace{\sum_{(v,w)\in K}(n-1)}_{(n-1)\cdot|K|}$$



$$\Longrightarrow \quad n\cdot|K| \le (n-1)\cdot|K| \quad \Big| \cdot \frac{1}{|K|}, \quad |K| \geq 3 \text{ K Kreis}$$

$$\Longrightarrow \quad n \le n-1$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le -1 \quad \lightning$$

<u>Bemerkung</u>: Mittels Lemma MTZ sieht man leicht, dass das Modell korrekt ist.

[51] Zusätzliche Variablen zum ATSP-Modell (d=1)

$$z_{vi} \in \{0,1\} \qquad \left(v \in V(D) \setminus \{1\},\ i \in [t]\right)$$

(„$z_{vi} = 1 \iff$ Knoten v wird von Fahrzeug i besucht")

$$\min \sum_{a \in A(D)} c_a \cdot x_a$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & \sum_{w \in V(D)\setminus\{v\}} x_{vw} = 1 && \forall v \in V(D)\setminus\{1\} \\
& \sum_{v \in V(D)\setminus\{w\}} x_{vw} = 1 && \forall w \in V(D)\setminus\{1\} \\
& \sum_{w \in V(D)\setminus\{1\}} x_{1w} = t && \\
& \sum_{v \in V(D)\setminus\{1\}} x_{v1} = t && \\
(*) \quad & n \cdot x_{vw} - (y_w - y_v) \leq n-1 && \forall v,w \in V(D)\setminus\{1\},\ v \neq w \\
& \sum_{v \in V(D)\setminus\{1\}} b_v \cdot z_{vi} \leq k_i && \forall i \in [t] \\
& \sum_{i=1}^{t} z_{vi} = 1 && \forall v \in V(D)\setminus\{1\} \\
& z_{vi} + x_{vw} - z_{wi} \leq 1 && \forall v,w \in V(D)\setminus\{1\},\ v \neq w,\ \forall i \in [t]
\end{aligned}
$$

$$x_a \in \{0,1\} \quad \forall a \in A(D)$$

$$z_{vi} \in \{0,1\} \quad \forall v \in V(D) \setminus \{1\} \quad \forall i \in [t]$$

$$\left(1 \leq y_v \leq n-1 \qquad \forall v \in V(D) \setminus \{1\} \right)$$

Variante: Kunden dürfen von bis zu 2 LKW beliefert werden

$$\sum_{w \in V(D) \setminus \{v\}} x_{vw} \geq 1 \qquad \forall v \in V(D) \setminus \{1\}$$

$$\sum_{v \in V(D) \setminus \{w\}} x_{vw} \geq 1 \qquad \forall w \in V(D) \setminus \{1\}$$

$$\sum_{w \in V(D) \setminus \{1\}} x_{1w} = t$$

$$\sum_{v \in V(D) \setminus \{1\}} x_{v1} = t$$

$$(*) \quad n \cdot x_{vw} - (y_w - y_v) \leq n-1 \qquad \forall v,w \in V(D) \setminus \{1\}, v \neq w$$

$$\sum_{v \in V(D) \setminus \{1\}} q_{vi} \leq k_i \qquad \forall i \in [t]$$

$$\sum_{i=1}^{t} q_{vi} = b_v \qquad \forall v \in V(D) \setminus \{1\}$$

$$q_{vi} \leq b_v z_{vi} \qquad \forall v \in V(D) \setminus \{1\}, i \in [t]$$

$$1 \leq \sum_{i=1}^{t} z_{vi} \leq 2 \qquad \forall v \in V(D) \setminus \{1\}$$

$$z_{vi} + x_{vw} - z_{wi} \leq 1 \qquad \forall v,w \in V(D) \setminus \{1\}, v \neq w, \ \forall i \in [t]$$

Zusätzliche Variablen: $q_{vi} \geq 0$

("q_{vi} = Volumen der Bestellung des Kunden v, das von LkW i geliefert wird")

→ Modell ist noch nicht korrekt! Probleme (u.a.?)

1) Balance der x-Variablen in den Knoten

2) Mehrfachnutzung von Bögen