$\boxed{\text{MOD } 25.4.17 \ [3a]}$

Zur Korrektheit des Modells

Wir überlegen zunächst, dass Bedingung (3) (für die definierte Variablen-Bedeutung) gültig ist.

1. Fall: $x_{ij} = 0$

(3) lautet dann $-(p_j - p_i) \leq n-1$ und das gilt, weil $1 \leq p_i, p_j \leq n$ (also $|p_i - p_j| \leq n-1$) sind.

2. Fall: $x_{ij} = 1$

j ist also Nachfolger von i, also $p_j = p_i + 1$, dass

$$\underbrace{n \cdot x_{ij}}_{n} - \underbrace{(p_j - p_i)}_{1} = n-1$$

Erfülle nun umgekehrt (p,x) die Bedingungen (1) - (4).

Wir müssen zeigen, dass $i \mapsto p_i$ eine Bijektion ist (also p eine Reihenfolge definiert) und $x_{ij} = 1 \Leftrightarrow p_j = p_i + 1$.

Wegen (1) gibt es für jedes $i \in [n-1]$ ein $j := s(i) \in [n] \setminus \{1, i\}$ und $x_{ij} = 1$. Wegen (2) ist $s : [n-1] \to [n] \setminus \{1\}$ injektiv. Wir konstruieren die Folge

$$J(1) := 1 \, , \; J(2) := s(J(1)) \, , \; J(3) := s(J(2)) , \ldots$$

welche wegen der Injektivität von s (und wegen $s(1) \neq 1$) mit $J(k) = n$ abbricht.

Angenommen, es wäre $k < n$. Dann wählen wir $i \in [n] \setminus \{J(1), .., J(k)\}$ und konstruieren die Folge

$$\tilde{J}(1) := i \, , \; \tilde{J}(2) := s(\tilde{J}(1)) , \; \tilde{J}(3) := s(\tilde{J}(2)) , \ldots$$

die wir bei dem Index $\tilde{k} > 1$ abbrechen, bei dem erstmalig $\tilde{j}(\tilde{k}) = \tilde{j}(1)$ ist [existiert wegen Injektivität von s].

Summieren wir nun die Ungleichungen (3) für $(i,j) = (\tilde{j}(1), \tilde{j}(2)), (\tilde{j}(2), \tilde{j}(3)), \ldots, (\tilde{j}(\tilde{k}), \tilde{j}(1))$,

so ergibt sich: $\tilde{k} n \leq \tilde{k}(n-1)$ ↯

Also ist $k = n$ und $i \mapsto \tilde{j}(i)$ ist eine Bijektion von $[n] \to [n]$.