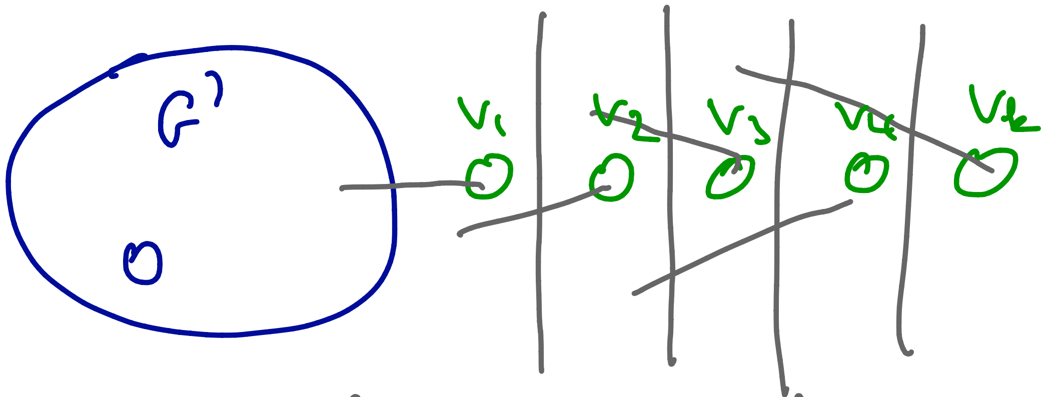
MAD 15.5.17 [6]

Um "$\geq$" in (*) nachzuweisen, zeige wir zunächst:

(**) Ist G' Untergraph des zusammenhängenden Graphen G mit $V(G') \neq \emptyset$, so gilt:

$$\operatorname{rang}(\mathrm{Inz}(G)) \geq \operatorname{rang}(\mathrm{Inz}(G')) + |V(G)| - |V(G')|$$

[Dazu:



Da G zusammenhängend ist, kann man $V(G) \setminus V(G') = \{v_1, \dots, v_k\}$ so nummerieren, dass für jedes $i \in [k]$ eine Kante $e_i = v_i w_i \in E(G)$ mit $w_i \in V(G') \cup \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ existiert.

Für den Untergraphen

$$H := \big(V(G),\ E(G') \cup \{e_1, \dots, e_k\}\big)$$

ist dann

$$\mathrm{Inz}(H) = \begin{array}{c} \\ V(G') \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{array} \!\!\begin{array}{c} \overbrace{\qquad E(G') \qquad}\ e_1 \ \cdots \ e_k \\ \left[\begin{array}{c|cccc} \mathrm{Inz}(G') & & & & \\ \hline & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & \vdots & 0 & \ddots & \\ & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array},$$

$$\text{also}\quad \mathrm{rang}(\mathrm{Inz}(H)) = \mathrm{rang}(\mathrm{Inz}(G')) + k$$

$$\mathrm{rang}(\mathrm{Inz}(H)) \le \mathrm{rang}(\mathrm{Inz}(G)) \quad]$$

Für jeden zusammenhängenden Graphen G ist also mit $G' := (\{v^*\}, \emptyset)$ für $v^* \in V(G)$ beliebig

$$\mathrm{rang}(\mathrm{Inz}(G)) \ge 0 + |V(G)| - 1,$$

was "$\geq$" für den bipartiten Fall zeigt.

Ist G nicht bipartit, so gibt es nach Satz 3 einen Kreis G' in G mit $|V(G')| = 2r+1$ $(r \in \{1,2,\dots\})$.

Es gilt

$$\operatorname{rang}(\operatorname{Inz}(G')) = \operatorname{rang} \underbrace{\left.\begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} 2r+1}_{2r+1}$$

$$= 2r+1,$$

$$\text{denn } \det(\operatorname{Inz}(G')) = 1 \cdot 1 + (-1)^{1+2r+1} \cdot 1$$

$$= 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Also

$$\operatorname{rang}(\operatorname{Inz}(G)) \geq \underbrace{\operatorname{rang}(\operatorname{Inz}(G'))}_{2r+1} + |V(G)| - \underbrace{|V(G')|}_{2r+1}$$

Bemerkung

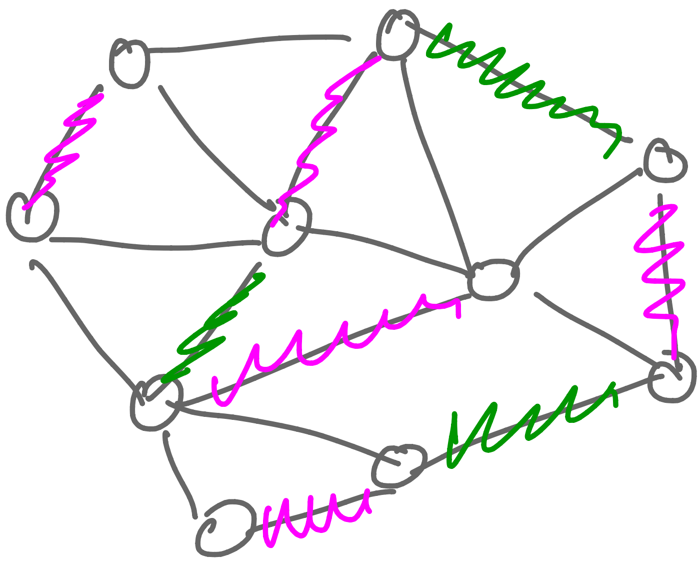
(**) gilt über jedem Körper (statt $\mathbb{R}$), insbesondere ist

$$GF(2)\text{-rang}(\mathrm{Inz}(G)) = |V(G)| - \#\text{Komponenten}$$

(da $\mathbb{1}^T \cdot \mathrm{Inz}(G) \equiv \mathbb{0}^T \mod (2)$ für <u>alle</u> Graphen G).

[24]

[25]

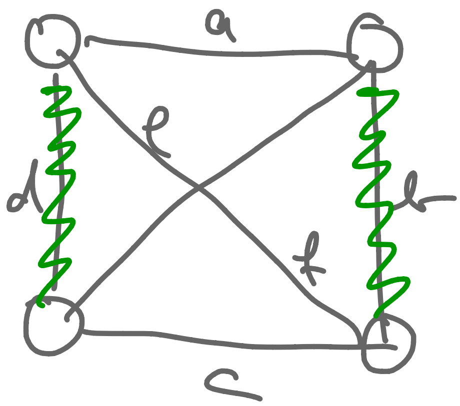


[26]

$$A = [6] = \{1,2,\dots,6\}$$

$$B = \{1,3,6\}$$

$$\chi(B) = \begin{array}{cccccc} (1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

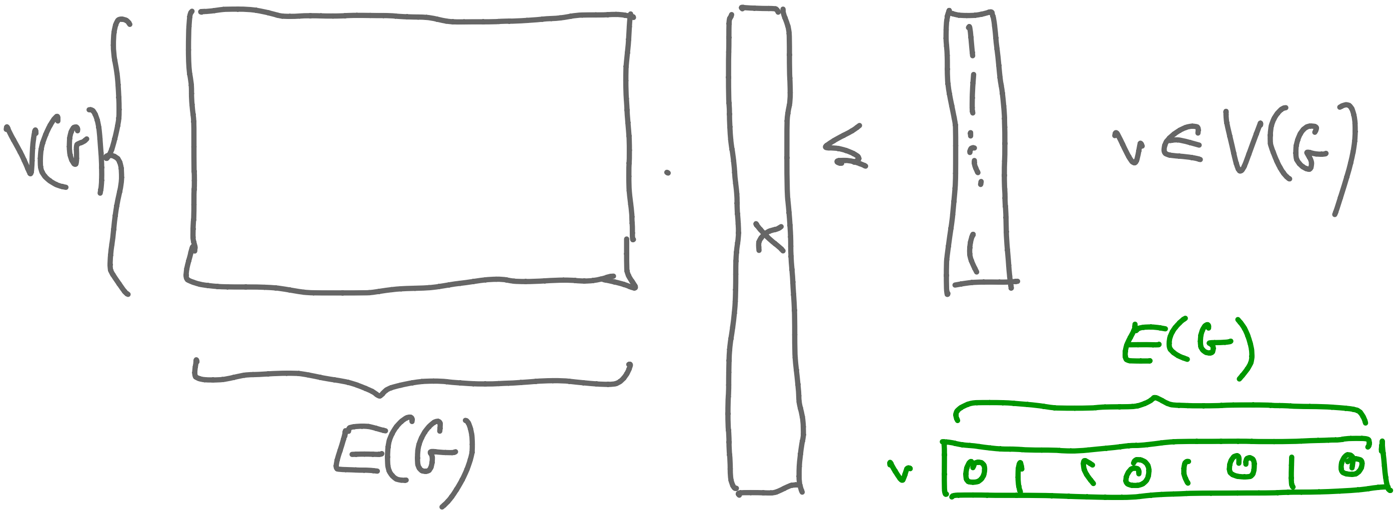


$M \subseteq E(G)$

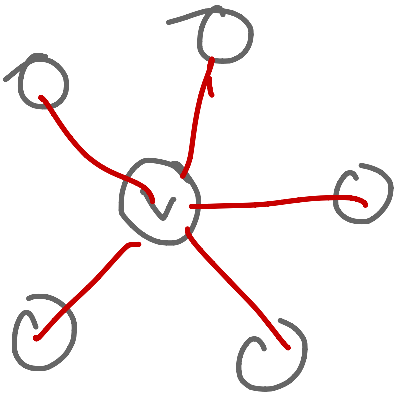
$$\chi(M) = \begin{array}{cccccc} (0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0) \\ a & b & c & d & e & f \end{array}$$

[27] Sei $x \in \{0,1\}^{E(G)}$. Dann:

$$\underbrace{\mathrm{Inz}(G) \cdot x} \leq \mathbb{1}_{V(G)}$$



$$\Longleftrightarrow \quad \forall v \in V(G): \underbrace{\langle \mathrm{Inz}(G)_{v,*}, x \rangle}_{= \sum_{\underbrace{e \in E(G):\, v \in e}_{= \delta(v)}} x_e} \leq 1$$



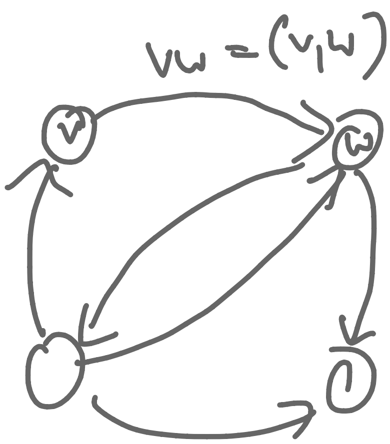
$\Longleftrightarrow \quad x = \chi(M)$ für ein Matching $M \subseteq E(G)$

Für $w \in \mathbb{R}^{E(G)}$ entsprechen die Optimallösungen von

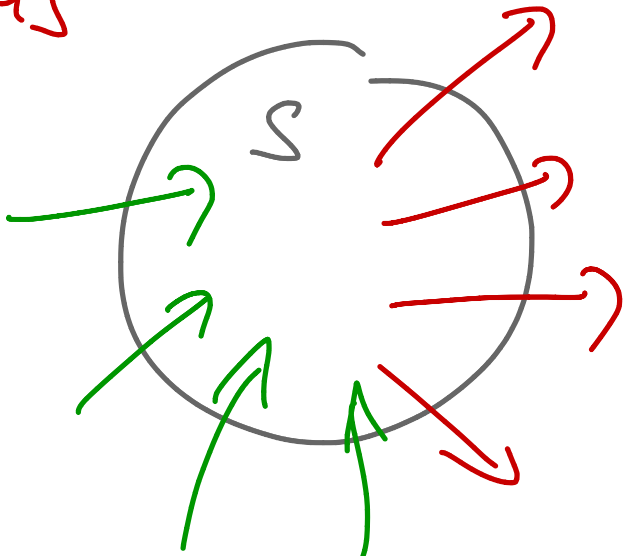
$$\max \; w^T x \quad (= \langle w, x \rangle)$$
$$\text{s.t.} \; \mathrm{Inz}(G) \cdot x \leq \mathbb{1}$$
$$x \in \{0,1\}^{E(G)}$$

genau den bzgl. w gewichtsmaximalen Matchings in G!

[28]

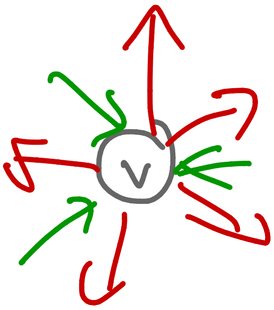


[29]



$\delta^{aus}(S)$

$\delta^{ein}(S)$

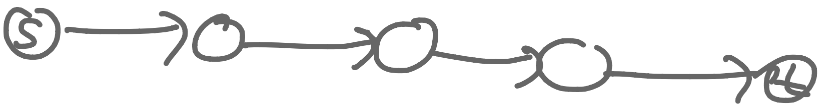


$\delta^{aus}(v)$

$\delta^{ein}(v)$

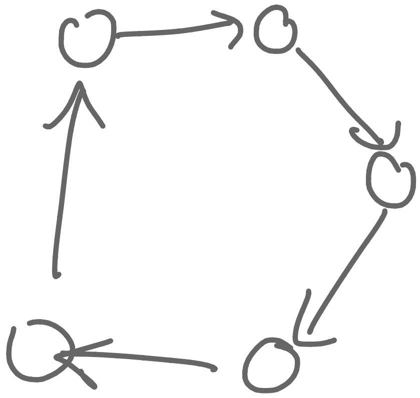
kein Weg

[32]

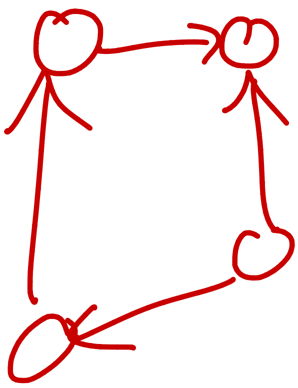


s–t–Weg

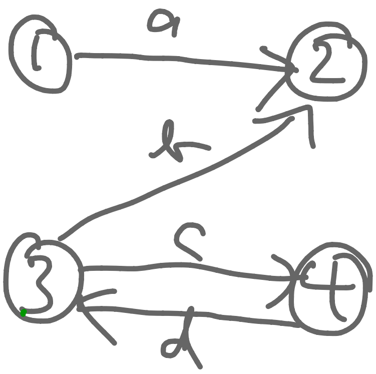
kein Kreis



Kreis



[38]



	a	b	c	d
1	-1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	0	-1	-1	1
4	0	0	1	-1