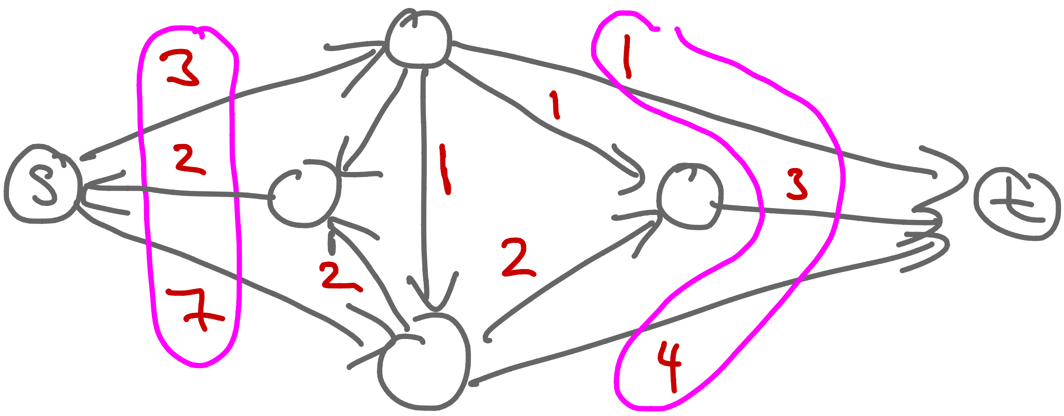
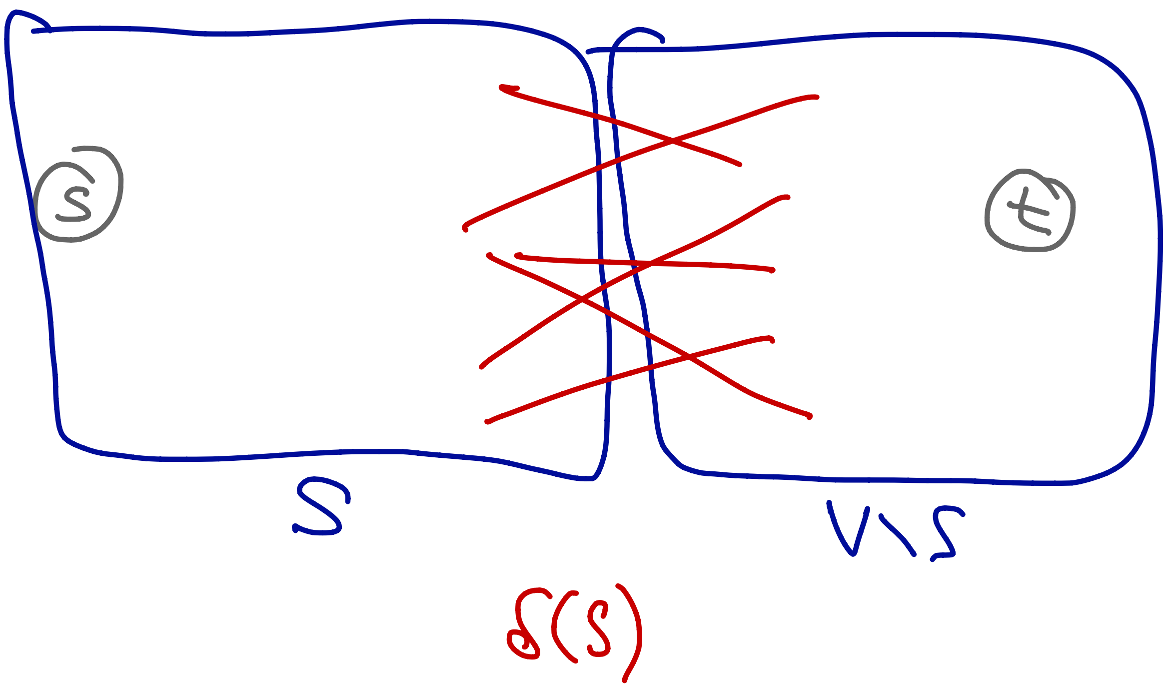
MOD 22.5.17 [7]

[42]

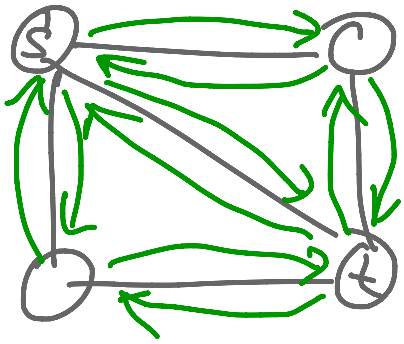


s-t-Fluss vom Wert 8

[45]



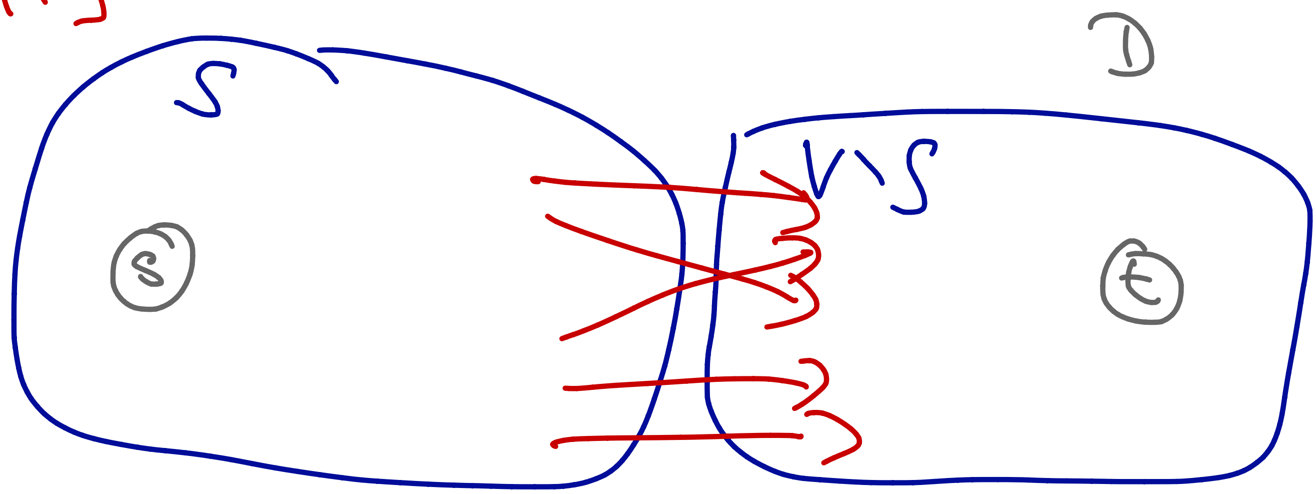
[46]



G

$D(G)$

[47]



$\delta^{\text{out}}(S)$

Beweis zu Satz 7

Seien D ein Digraph, $u \in \mathbb{R}_+^{A(D)}$ und $s, t \in V(D)$, $s \neq t$. Sei μ der maximale Wert eines s-t-Flusses und κ die minimale Kapazität eines s-t-Schnitts in dem Netzwerk.

Wir zeigen zunächst $\mu \leq \kappa$ ("schwache Dualität")

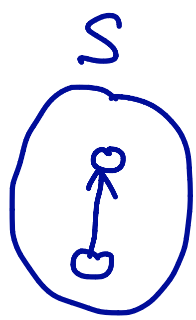
Seien $f \in \mathbb{R}_+^{A(D)}$ irgendein s-t-Fluss und $\delta^{aus}(S) \subseteq A(D)$ $\left(S \subseteq V(D), s \in S, t \notin S\right)$ irgendein s-t-Schnitt.

$$\sum_{a \in \delta^{aus}(S)} f_a - \sum_{a \in \delta^{ein}(S)} f_a$$

$$= \sum_{v \in S} \left(\sum_{a \in \delta^{aus}(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^{ein}(v)} f_a \right)$$

Flusserhaltung

$$= \sum_{a \in \delta^{aus}(S)} \underbrace{f_a}_{\leq u_a} - \sum_{a \in \delta^{ein}(S)} \underbrace{f_a}_{\geq 0}$$



$$\leq \sum_{a \in \delta^{aus}(S)} u_a = u\left(\delta^{aus}(S)\right)$$

Nun zeigen wir noch $\kappa \le \mu$ ("starke Dualität")

Sei $f \in \mathbb{R}_+^{A(D)}$ ein s-t-Fluss maximalen Wert μ im Netzwerk. Definiere den Residualgraphen

$$R_f = \left(V(D),\ \vec{A}_f \,\dot\cup\, \overleftarrow{A}_f\right)$$

mit

$$\vec{A}_f := \{(v,w) : f_{vw} < u_{vw}\}$$

$$\overleftarrow{A}_f := \{(w,v) : f_{vw} > 0\}$$

Vorsicht: $\vec{A}_f$ und $\overleftarrow{A}_f$ müssen nicht disjunkt sein: $\vec{A}_f \,\dot\cup\, \overleftarrow{A}_f$ enthält u.U. von einigen Bögen zwei Kopien ("Multimenge")

z.B.: