Kapitel 4

MILP: Struktur und Algorithmen

4.1 Lineare Optimierung und Polyeder

(Kontinuierliche) Lineare Optimierung
=
Linear Programming (**LP**)

Eingabe:

$$A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, b \in \mathbb{Q}^m, c \in \mathbb{Q}^n$$

Zulässige Lösungen:

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b\}$$

Aufgabe: Finde *Optimallösung* $x^{\text{opt}} \in P$ mit

$$\langle c, x^{\text{opt}} \rangle = \max\{\langle c, x \rangle \ : \ x \in P\}$$

Definition. *Ein **Polyeder** ist die Lösungsmenge eines endlichen Systems von linearen Gleichungen und Ungleichungen. Ein **Polytop** ist ein Polyeder P, das beschränkt ist (d.h. es gibt $B \in \mathbb{R}$, so dass $\|x\| \leq B$ für all $x \in P$ gilt).*

[54]

Bemerkung. *Wir betrachten hier nur beschränkte Polyeder (also Polytope).*

Definition. *Eine **Seite** (engl.: **face**) eines Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge*

$$F = \{x \in P \,:\, a^T x = \beta\}\,,$$

wobei $a^T x \leq \beta$ für alle $x \in P$ gilt; man sagt dann, $a^T x \leq \beta$ definiere die Seite F von P.

[55]

Bemerkung. *Seiten von Polyedern sind Polyeder.*

Satz 8. *Jedes Polyeder hat nur endlich viele Seiten.*

Definition. *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein **affiner Unterraum**, wenn sie mit je zwei Punkten $x^1, x^2 \in A$ auch die Gerade*

$$\{\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \,:\, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

enthält.

Bemerkung. *Affine Unterräume sind genau die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen (siehe Lineare Algebra).*

Definition. *Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn sie mit je zwei Punkten $x^1, x^2 \in K$ auch die Verbindungsstrecke*

$$\{\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \,:\, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$$

enthält.

Bemerkung. *Polyeder sind konvex.*

[56]

Definition. *Die **affine Hülle*** $\mathrm{aff}(X)$ *einer Menge* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist der Schnitt aller affinen Unterräume, die X enthalten.*

Definition. *Die **konvexe Hülle*** $\mathrm{conv}(X)$ *einer Menge* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist der Schnitt aller konvexen Mengen, die X enthalten.*

Bemerkung. *Affine bzw. konvexe Hüllen sind affine Unterräume bzw. konvexe Mengen.*

Satz 9. *Für jede Menge* $X = \{x^1, \ldots, x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *gelten:*

$$\mathrm{aff}(X) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \,:\, \sum \lambda_i = 1, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

*(**affine Kombinationen** von X)*

$$\mathrm{conv}(X) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \,:\, \sum \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$$

*(**konvexe Kombinationen** von X)*

[57]

Definition. *Die **Dimension** $\dim(P)$ eines Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Dimension seiner affinen Hülle* $\operatorname{aff}(P)$.

Definition. *Die* 0-, 1-, *bzw.* $\dim(P)$*-dimensionalen Seiten eines Polyeders P heißen seine **Ecken**, **Kanten** bzw. **Facetten**.*

[58]

Satz 10. *Ist P ein Polytop, so ist genau dann*

$$P = \{x \in \operatorname{aff}(P) \,:\, Ax \leq b\}\,,$$

wenn $Ax \leq b$ für jede Facette F von P wenigstens eine F definierende Ungleichung enthält.

Satz 11 (Satz von Weyl-Minkowski)**.** *Jedes Polytop ist die konvexe Hülle seiner (endlich vielen) Ecken. Umgekehrt ist die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten stets ein Polytop.*

[59]

Satz 12. *Ist $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop, so wird für jedes $c \in \mathbb{R}^n$ das Optimum von*

$$\max / \min\{c^T x \,:\, x \in P\}$$

in einer Ecke von P angenommen.

Satz 13. *Jede Kante eines Polytops ist die konvexe Hülle (Verbindungsstrecke) zweier Ecken des Polytops. Der von den Ecken (Knoten) und Kanten definierte Graph eines Polytops ist zusammenhängend.*

4.2 Der Simplex-Algorithmus

- Löst (kontinuierliche) lineare Optimierungsprobleme (LP's)
- Sucht zunächst eine Startecke v.
- Solange v keine Optimallösung ist wird v durch eine zu v über eine Kante benachbarte Ecke mit besserem Zielfunktionswert ersetzt.
- Entscheidend für die Korrektheit: Konvexität (*lokale Optimalität impliziert globale Optimalität*)
- Algorithmische Umsetzung: Pivotisieren in Tableaus oder den Rechenaufwand verringernde Verfahren der Linearen Algebra (*Faktorisierung von Basis-Matrizen, η-updates*)
- Andere relevante Klasse von LP-Algorithmen: *Innere-Punkte-Verfahren*

[60]