Kapitel 2

Graphen und Netzwerke

2.1 Ungerichtete Graphen

Definition. *Ein ungerichteter **Graph** ist ein Paar $G = (V, E)$ mit einer (hier) endlichen Menge V und einer Menge $E \subseteq \binom{V}{2}$ von zwei-elementigen Teilmengen von V.*

- $\mathrm{V}(G) := V$: *Menge der **Knoten** (Ecken, Vertices) von G*
- $\mathrm{E}(G) := E$: *Menge der **Kanten** von G*

Für $e = \{v, w\} \in E$:

- *Alternative Schreibweise: $e = vw (= wv)$*
- *v und w sind **incident** zu e.*
- *v und w sind **Nachbarn** voneinander.*
- *v und w sind zueinander **adjacent**.*

[10]

Definition. *Sei G ein Graph.*

- *Für $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ heißt*

$$\delta(S) := \delta_G(S) := \{e \in \mathrm{E}(G) \,:\, |e \cap S| = 1\}$$

  *der von S induzierte **Schnitt**; wir definieren ferner*

$$\mathrm{E}(S) := \mathrm{E}_G(S) := \{e \in \mathrm{E}(G) \,:\, e \subseteq S\}.$$

- *Für $v \in \mathrm{V}(G)$ heißt*

$$\delta(v) := \delta_G(v) := \delta_G(\{v\})$$

  *der **Stern** von v; $\deg(v) := \deg_G(v) := |\delta_G(v)|$ heißt der **Grad** von v.*

[11]

Bemerkung. *In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.*

[12]

Definition. *Ein Graph G' ist **Untergraph** (**Subgraph**) eines Graphen G, wenn $\mathrm{V}(G') \subseteq \mathrm{V}(G)$ und $\mathrm{E}(G') \subseteq \mathrm{E}(G)$ gelten; ist sogar $\mathrm{V}(G') = \mathrm{V}(G)$, so ist G' ein **spannender Untergraph** von G.*

[13]

Definition. *Für einen Graphen G und $U \subseteq \mathrm{V}(G)$ ist $G[U] := (U, \mathrm{E}_G(U))$ der von U **induzierte Untergraph** von G.*

[14]

Definition. *Ein **Weg** ist ein Graph P mit* $\mathrm{V}(P) = \{v_0, \ldots, v_k\}$ *($k \geq 0$) mit paarweise verschiedenen Knoten* $v_0, \ldots, v_k$ *und Kantenmenge* $\mathrm{E}(P) = \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k\}$*; seine **Länge** ist k. P ist ein s-t-**Weg**, wenn* $\{v_0, v_k\} = \{s, t\}$ *ist.*

Definition. *Ein **Kreis** ist ein Graph C mit* $\mathrm{V}(C) = \{v_1, \ldots, v_k\}$ *($k \geq 3$) mit paarweise verschiedenen Knoten* $v_1, \ldots, v_k$ *und Kantenmenge* $\mathrm{E}(C) = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k, v_kv_1\}$*; seine **Länge** ist k.*

[15]

Definition. *Sei G ein Graph. Ein **Weg/Kreis in** G ist ein Untergraph H von G, der ein Weg/Kreis ist.*

Bemerkung.

- *Ein Weg/Kreis in einem Graphen G, der ein spannender Untergraph von G ist, heißt **hamiltonisch**.*
- *Eine Kantenteilmenge* $F \subseteq \mathrm{E}(G)$ *eines Graphen G identifizieren wir oft mit dem Untergraphen* $(\mathrm{V}(F), F)$ *von G, wobei* $\mathrm{V}(F) \subseteq \mathrm{V}(G)$ *die Menge aller Knoten sei, die in wenigstens einer Kante aus F enthalten sind.*

[16]

Definition. *Ein Graph G heißt **zusammenhängend**, wenn es für je zwei Knoten $s, t \in \mathrm{V}(G)$ einen s-t-Weg in G gibt.*

Definition. *Die **Komponenten** (auch: **Zusammenhangskomponenten**) eines Graphen sind seine inklusionsmaximalen zusammenhängenden induzierten Untergraphen.*

[17]

Definition. *Ein Graph heißt **azyklisch** oder ein **Wald**, wenn er keinen Kreis enthält (d.h. wenn keiner seiner Untergraphen ein Kreis ist). Ein zusammenhängender Wald heißt **Baum**.*

[18]

Bemerkung. *In jedem azyklischen Graph G mit $\mathrm{E}(G) \neq \varnothing$ gibt es wenigstens zwei Knoten vom Grad Eins.*

[19]