Definition. *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathrm{E}(G)$ heißt ein* ***Matching*** *(oder auch eine* ***Paarung****) im Graphen G, wenn $e \cap e' = \varnothing$ für alle $e, e' \in M$ mit $e \neq e'$ gilt; ein Matching M heißt* ***perfekt****, wenn $|M| = \frac{1}{2}|\mathrm{V}(G)|$ gilt (d.h., wenn jeder Knoten in einer Kante des Matchings enthalten ist).*

[25]

Definition. *Sei A eine endliche Menge. Der* ***charakteristische Vektor*** *(oder auch:* ***Inzidenzvektor****) einer Teilmenge $B \subseteq A$ ist der 0/1-Vektor $\chi(B) \in \{0,1\}^A$ mit*

$$\chi(B)_a = \begin{cases} 1 & \textit{falls } a \in B \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

[26]

Bemerkung. *Für jeden Graphen G gelten:*

- $\{\chi(M) : M \textit{ Matching in } G\} = \{x \in \{0,1\}^{\mathrm{E}(G)} : \mathrm{Inz}(G)x \leq \mathbb{1}\}$
- $\{\chi(M) : M \textit{ perfektes Matching in } G\} = \{x \in \{0,1\}^{\mathrm{E}(G)} : \mathrm{Inz}(G)x = \mathbb{1}\}$

[27]

2.2 Gerichtete Graphen

Definition. *Ein einfacher **gerichteter Graph** (auch: **Digraph** = directed graph) ist ein Paar $D = (V, A)$ mit einer (hier) endlichen Menge V und einer Menge*

$$A \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) : v \in V\}$$

von geordneten Paaren von Elementen aus V.

- $\mathrm{V}(D) := V$: *Menge der **Knoten** von D*
- $\mathrm{A}(D) := A$: *Menge der **Bögen** (Kanten) von D*

Für $a = (v, w) \in A$:

- *Alternative Schreibweise: $a = vw$*
- *v heißt **Anfangsknoten (tail)** von a.*
- *w heißt **Endknoten (head)** von a.*
- *a ist eine **Aus-Bogen** von v.*
- *a ist eine **Ein-Bogen** von w.*
- *w ist **Aus-Nachbar** von v.*
- *v ist **Ein-Nachbar** von w.*

[28]

Definition. *Sei D ein Digraph.*

- *Für $S \subseteq \mathrm{V}(D)$ heißt*

  $$\delta^{\text{aus}}(S) := \delta_D^{\text{aus}}(S) := \mathrm{A}(D) \cap (S \times (\mathrm{V}(D) \setminus S))$$

  der von S induzierte ***Schnitt***

- *Für $v \in \mathrm{V}(D)$ heißen*

  $$\delta^{\text{aus}}(v) := \delta_D^{\text{aus}}(v) := \mathrm{A}(D) \cap (\{v\} \times \mathrm{V}(D))$$

  und

  $$\delta^{\text{ein}}(v) := \delta_D^{\text{ein}}(v) := \mathrm{A}(D) \cap (\mathrm{V}(D) \times \{v\})$$

  der ***Aus-Stern*** *bzw.* ***Ein-Stern*** *von v.*

[29]

Definition. *Ein Graph D' ist* ***Unterdigraph*** *(**Subdigraph**) eines Digraphen D, wenn $\mathrm{V}(D') \subseteq \mathrm{V}(D)$ und $\mathrm{A}(D') \subseteq \mathrm{A}(D)$ gelten; ist sogar $\mathrm{V}(D') = \mathrm{V}(D)$, so ist D' ein* ***spannender Unterdigraph*** *von D.*

[30]

Definition. *Für einen Graphen D und $U \subseteq \mathrm{V}(D)$ ist $D[U] := (U, \mathrm{A}(D) \cap (U \times U)$ der von U* ***induzierte Unterdigraph*** *von D.*

[31]

Definition. *Ein* ***gerichteter Weg*** *ist ein Digraph P mit Knotenmenge $\mathrm{V}(P) = \{v_0, \ldots, v_k\}$ ($k \geq 0$) mit paarweise verschiedenen $v_0, \ldots, v_k$ und Bogenmenge*

$$\mathrm{A}(P) = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\};$$

seine ***Länge*** *ist k. P ist ein* ***s-t-Weg****, wenn $v_0 = s$ und $v_k = t$ sind.*

Definition. *Ein* ***gerichteter Kreis*** *ist ein Digraph C mit Knotenmenge $\mathrm{V}(C) = \{v_1, \ldots, v_k\}$ ($k \geq 2$) mit paarweise verschiedenen $v_1, \ldots, v_k$ und Bogenmenge*

$$\mathrm{A}(C) = \{(v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)\};$$

seine ***Länge*** *ist k.*

[32]

Definition. *Sei D ein Digraph. Ein* ***Weg/Kreis in*** *D ist ein Unterdigraph H von D, der ein gerichteter Weg/Kreis ist.*

Bemerkung.

- *Ein Weg/Kreis in einem Digraphen D, der ein spannender Untergraph von D ist, heißt* ***hamiltonisch****.*

- *Eine Bogenteilmenge $F \subseteq \mathrm{A}(D)$ eines Digraphen D identifizieren wir oft mit dem Unterdigraphen $(\mathrm{V}(F), F)$ von D, wobei $\mathrm{V}(F) \subseteq \mathrm{V}(D)$ die Menge aller Knoten sei, die Anfangs- oder Endknoten von wenigstens einem Bogen aus F sind.*

[33]

Definition. *Ein Digraph D heißt* ***stark zusammenhängend****, wenn es für je zwei Knoten $s, t \in \mathrm{V}(D)$ einen s-t-Weg in D gibt.*

Definition. *Die* ***starken Zusammenhangskomponenten*** *eines Digraphen sind seine inklusionsmaximalen stark zusammenhängenden induzierten Untergraphen.*

[34]

Definition. *Der* ***zugrunde liegende ungerichtete Graph*** *eines Digraphen D ist der Graph $(\mathrm{V}(D), E)$ mit*

$$\{v, w\} \in E \Leftrightarrow ((v, w) \in \mathrm{A}(D) \text{ oder } (w, v) \in \mathrm{A}(D)).$$

Definition. *Die* ***schwachen Zusammenhangskomponenten*** *eines Digraphen sind die von den Knotenmengen der Komponenten seines unterliegenden ungerichteten Graphen induzierten Unterdigraphen.*

[35]

Definition. *Ein Digraph heißt* ***azyklisch****, wenn er keinen Kreis enthält (d.h. wenn keiner seiner Untergraphen ein gerichteter Kreis ist).*

[36]

Bemerkung. *In jedem azyklischen Digraphen G mit $\mathrm{V}(D) \neq \varnothing$ gibt es wenigstens einen Knoten mit Ausgrad Null und wenigstens einen Knoten mit Eingrad Null.*

[37]

Definition. *Die* ***Inzidenzmatrix*** *eines Digraphen D ist die Matrix* $\operatorname{Inz}(D) \in \{0,1\}^{\mathrm{V}(D)\times \mathrm{A}(D)}$ *mit*

$$\operatorname{Inz}(D)_{v,a} = \begin{cases} 1 & \textit{falls } a \in \delta^{\mathrm{ein}}(v) \\ -1 & \textit{falls } a \in \delta^{\mathrm{aus}}(v) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}.$$

[38]

Satz 5. *Der Rang der Inzidenzmatrix eines Digraphen D ist $|\mathrm{V}(D)|$ minus der Anzahl der schwachen Zusammenhangskomponenten von G.*

[39]

Definition. *Ein* ***Netzwerk*** *ist ein Digraph D zusammen mit* ***unteren*** *(lower) und* ***oberen*** *(upper)* ***Kapazitäten***

$$\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^{\mathrm{A}(D)} \quad \textit{bzw.} \quad u \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^{\mathrm{A}(D)}$$

auf den Bögen mit $\ell \leq u$; die unteren Kapazitäten sind $\ell = \mathbb{0}$, falls sie nicht angegeben werden.

[40]