Definition. *In einem Netzwerk mit Digraph D und unteren und oberen Kapazitäten ℓ bzw. u ist*

$$\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}(D)} : \mathrm{Inz}(D)x = \mathbb{O}, \ell \le x \le u\}$$

die Menge der ***Zirkulationen****.*

[41]

Definition. *Seien A eine endliche Menge und $B \subseteq A$, Für $x \in \mathbb{R}^A$ sei*

$$X(B) := \sum_{b \in B} x_b \,.$$

[42]

Definition. *In einem Netzwerk mit Digraph D, (oberen) Kapazitäten u, einer* ***Quelle*** *$s \in \mathrm{V}(D)$ und einer* ***Senke*** *$t \in \mathrm{V}(D)$ (mit $s \neq t$) ist*

$$\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}(D)} : \mathrm{Inz}(D)^{s,t}x = \mathbb{O}, \mathbb{O} \le x \le u\}$$

die Menge der ***s-t-Flüsse*** *(wobei $\mathrm{Inz}(D)^{s,t}$ die Matrix ist, welche aus $\mathrm{Inz}(D)$ durch Streichen der beiden zu s und t gehörenden Zeilen entsteht); der* ***Wert*** *eines s-t-Flusses x ist*

$$x(\delta^{\mathrm{aus}}(s)) - x(\delta^{\mathrm{ein}}(s))$$

($= x(\delta^{\mathrm{ein}}(t)) - x(\delta^{\mathrm{aus}}(t))$).

[43]

Kapitel 3

MILP für KO-Probleme

3.1 Ausfallsichere Netze

Gegeben:

- Graph G
- Kantenkosten $c \in \mathbb{Q}^{\mathrm{E}(G)}$
- Ausfallsicherheitsanforderungen $\alpha_i \in \mathbb{N}$ für einige Knotenpaare $(s_i, t_i) \in \mathrm{V}(G) \times \mathrm{V}(G)$ mit $s_i \neq t_i$ (für $i \in [k]$)

Eine Kantenteilmenge $F \subseteq \mathrm{E}(G)$ heißt **ausfallsicher**, wenn für jedes $i \in [k]$ gilt: Für alle $F' \subseteq F$ mit $|F'| \leq \alpha_i$ gibt es einen s_i-t_i-Weg in $F \setminus F'$. [44]

Gesucht:
Eine kostenminimale ausfallsichere Kantenteilmenge

Definition. *Seien $s, t \in \mathrm{V}(G)$ zwei Knoten im Graphen G. Ein Schnitt $\delta(U) = \delta(\mathrm{V}(G) \setminus U)$ (mit $U \subseteq \mathrm{V}(G)$) heißt ein* ***s-t-Schnitt****, wenn $s \in U, t \notin U$ oder $s \notin U, t \in U$ gilt.*

Bemerkung. *Eine Kantenteilmenge $F \subseteq \mathrm{E}(G)$ im obigen Problem ist genau dann ausfallsicher, wenn für alle $i \in [k]$ die minimale Kardinalität eines s_i-t_i-Schnitts in $(\mathrm{V}(G), F)$ wenigstens $\alpha_i + 1$ ist.*

[45]

Definition. *Für einen Graphen G sei $D(G)$ der gerichtete Graph mit*

- $\mathrm{V}(D(G)) = \mathrm{V}(G)$
- $(v, w) \in \mathrm{A}(D(G)) \Leftrightarrow \{v, w\} \in \mathrm{E}(G)$

[46]

Satz 6. *Seien $s, t \in \mathrm{V}(G)$ zwei Knoten ($s \neq t$) im Graphen G. Die minimale Kardinalität eines s-t-Schnitts in G ist gleich dem maximalen Wert eines s-t-Flusses im Netzwerk $D(G)$ mit Kapazität Eins auf allen Bögen.*

Definition. *Seien $s, t \in \mathrm{V}(D)$ zwei Knoten im Digraphen D. Ein Schnitt $\delta^{\text{aus}}(S)$ (mit $S \subseteq \mathrm{V}(D)$) heißt ein* ***$s$-$t$-Schnitt****, wenn $s \in S, t \notin S$ gilt. Seine* ***Kapazität*** *bezüglich $u \in \mathbb{R}_+^{\mathrm{A}(D)}$ ist $u(\delta^{\text{aus}}(S)) = \sum_{a \in \delta^{\text{aus}}(S)} u_a$.*

Satz 7 (Max-flow-min-cut Theorem)**.** *Seien $s, t \in \mathrm{V}(D)$ zwei Knoten ($s \neq t$) im Digraphen D mit Kapazitäten $u \in \mathbb{R}_+^{\mathrm{A}(D)}$. Dann ist der maximale Wert eines s-t-Flusses gleich der minimalen Kapaziät einen s-t-Schnitts.*

[47]