Vorlesung
Kombinatorische Optimierung
(Wintersemester 2012/13)

Kapitel 1: Kürzeste Wege und Kreise

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 4. Oktober 2012)

Graphen und Digraphen

Definition 1.1

Ein **Graph** ist ein Paar $G = (V, E)$ bestehend aus einer endlichen **Knotenmenge** V und einer Teilmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$ der zweielementigen Teilmengen von V, der **Kantenmenge** von G.

Definition 1.2

Ein **Digraph** (**gerichteter Graph**) ist ein Paar $D = (V, A)$ bestehend aus einer endlichen **Knotenmenge** V und einer Teilmenge

$$A \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) \,|\, v \in V\},$$

der **Bogenmenge** von D. Zwei Bögen $(v, w), (w, v) \in A$ heißen **antiparallel**.

Wege und Kreise in Graphen

Definition 1.3

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{v_0, v_1, \dots, v_l\}$ und

$$E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{l-1}, v_l\}\}$$

1. Sind $v_0, v_1, \dots, v_l$ paarweise verschieden, so heißt G ein $v_0 - v_l$-**Weg** der **(kombinatorischen) Länge** l.
2. Ist $v_0 = v_l$ und sind $v_0 = v_l, v_1, \dots, v_{l-1}$ paarweise verschieden, so ist G ein **Kreis** der **(kombinatorischen) Länge** l.

Wege und Kreise in Digraphen

Definition 1.4

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_l\}$ und

$$A = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{l-1}, v_l)\}$$

1. Sind $v_0, v_1, \ldots, v_l$ paarweise verschieden, so heißt D ein **(gerichteter)** $v_0 - v_l$**-Weg** der **(kombinatorischen) Länge** l.
2. Ist $v_0 = v_l$ und sind $v_0 = v_l, v_1, \ldots, v_{l-1}$ mit $l \geq 2$ paarweise verschieden, so ist G ein **(gerichteter) Kreis** der **(kombinatorischen) Länge** l.

Teilgraphen

Definition 1.5

Sind $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ (bzw. $D = (V, A)$ und $D' = (V', A')$) zwei Graphen (bzw. Digraphen) mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ (bzw. $A' \subseteq A$), so ist G' ein **Teilgraph** von G (bzw. D' ein **Teildigraph** von D). Falls sogar

$$E' = E \cap \binom{V'}{2} \quad \text{bzw.} \quad A' = A \cap (V' \times V')$$

gilt, so heißt der Teilgraph **induzierter Untergraph** (bzw. **induzierter Unterdigraph**). Gilt $V' = V$, so heißt der Teilgraph **spannend**.

Induzierte Knoten-, Kanten-, Bögenmengen

Definition 1.6

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für Teilmengen $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ definieren wir $E(V') := E \cap \binom{V'}{2}$ und

$$V(E') := \{v \in V \mid \{v, w\} \in E' \text{ für ein } w \in V\}$$

Definition 1.7

Sei $D = (V, A)$ ein Graph. Für Teilmengen $V' \subseteq V$ und $A' \subseteq A$ definieren wir $A(V') := A \cap (V' \times V')$ und

$$V(A') := \{v \in V \mid (v, w) \in A' \text{ oder } (w, v) \in A' \text{ für ein } w \in V\}$$

Wege und Kreise in Graphen

Definition 1.8

Für eine endliche Menge $M, c \in \mathbb{R}^M$ und $N \subseteq M$ definieren wir

$$c(N) := \sum_{x \in N} c_x.$$

Definition 1.9

Ist $G = (V, E)$ ein Graph, $c \in \mathbb{R}^E$, und $G' = (V', E')$ ein Untergraph von G, der ein s-t-Weg (bzw. ein Kreis) ist, so heißt $E' \subseteq E$ ein s-t-Weg (bzw. Kreis) in G. Seine **c-Länge** ist $c(E')$. Die Menge der **von E' besuchten Knoten** ist $V' = V(E')$.

Wege und Kreise in Digraphen

Definition 1.10

Ist $D = (V, A)$ ein Digraph, $c \in \mathbb{R}^A$, und $D' = (V', A')$ ein Unterdigraph von D, der ein (gerichteter) s-t-Weg (bzw. ein (gerichteter) Kreis) ist, so heißt $A' \subseteq A$ ein (gerichteter) s-t-Weg (bzw. (gerichteter) Kreis) in D. Seine c-**Länge** ist $c(A')$. Die Menge der **von** A' **besuchten Knoten** ist $V' = V(A')$.

Wege- und Kreisprobleme

Problem 1.11 (Kürzeste-Wege Problem)

Instanz: *Digraph* $D = (V, A)$, $c \in \mathbb{Q}^A$, $s, t \in V$

Aufgabe: *Finde einen* s*-*t*-Weg kürzester* c*-Länge oder stelle fest, dass es keinen* s*-*t*-Weg in* D *gibt.*

Problem 1.12 (Kürzester-Kreis-Problem)

Instanz: *Digraph* $D = (V, A)$, $c \in \mathbb{Q}^A$

Aufgabe: *Finde einen Kreis kürzester* c*-Länge oder stelle fest, dass es keinen Kreis in* D *gibt.*

Ungerichtete Graphen

Bemerkung 1.13

Das Problem, in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ *kürzeste Wege oder Kreise zu finden, kann man durch Konstruktion des Digraphen* $D = (V, A)$ *mit*

$$A = \{(v, w) \in V \times V \mid \{v, w\} \in E\}$$

auf die Probleme **??** *bzw.* **??** *zurück führen.*

Weitere Bemerkungen

Bemerkung 1.14

- *Analog zum Kürzesten-Wege bzw. Kürzesten-Kreis Problem ist das* **Längste-Wege Problem** *bzw. das* **Längster-Kreis Problem** *definiert.*
- *Durch Multiplikation des Längenvektors c mit (-1) kann man Kürzeste- und Längste-Wege/Kreise-Probleme ineinander transformieren (solange es nicht auf Vorzeichen ankommt).*
- *Kürzester/Längster-Kreis Probleme kann man mit Hilfe von $|A|$ Kürzeste/Längste-Wege Problemen lösen.*
- *Das Kürzeste/Längste-Wege/Kreise Probleme für beliebige D und c sind NP-schwer (z.B. Reduktion von Hamilton-Kreis oder Hamilton-Pfad, s. Übungen).*

Nachbarn, Sterne, Knotengrade

Definition 1.19

Für einen Digraphen $D = (V, A)$ und $v \in V$ definieren wir:

- $\mathrm{N}^{\text{aus}}(v) := \{w \in V \mid (v, w) \in A\}$
- $\mathrm{N}^{\text{ein}}(v) := \{w \in V \mid (w, v) \in A\}$
- $\delta^{\text{aus}}(v) := \{(v, w) \mid w \in \mathrm{N}^{\text{aus}}(v)\}$
- $\delta^{\text{ein}}(v) := \{(w, v) \mid W \in \mathrm{N}^{\text{ein}}(v)\}$

$|\delta^{\text{aus}}(v)|$ und $|\delta^{\text{ein}}(v)|$ sind der **Ausgrad** bzw. der **Eingrad** von v.
Für einen Graphen $G = (V, E)$ und $v \in V$ definieren wir:

- $\mathrm{N}(v) := \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$
- $\delta(v) := \{\{v, w\} \mid w \in \mathrm{N}(v)\}$

$|\delta(v)|$ ist der **Grad** von v.

Zusammenhang

Definition 1.21

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **zusammenhängend**, wenn es für jedes Paar $s, t \in V$ einen s-t-Weg in G gibt.

Definition 1.22

Für einen Digraphen $D = (V, A)$ heißt $G = (V, E)$ mit

$$E = \{\{v, w\} \mid (v, w) \in A \text{ oder } (w, v) \in A\}$$

der D **zugrunde liegende ungerichtete Graph**.

Definition 1.23

Ein Digraph $D = (V, A)$ heißt **stark zusammenhängend**, wenn es für jedes Paar $s, t \in V$ einen (gerichteten) s-t-Weg in D gibt. Ist der D zugrunde liegende ungerichtete Graph zusammenhängend, so heißt D **schwach zusammenhängend**.

Bäume und Wälder

Definition 1.24

Ein **Wald** ist ein (ungerichteter) Graph, der keine Kreise enthält.
Ein Wald ist ein **Baum**, wenn er zusammenhängend ist.

Bemerkung 1.25

Ein Graph $G = (V, E)$ *ist genau dann ein Baum, wenn er zusammenhängend ist und* $|E| = |V| - 1$ *gilt.*

Branchings und Arboreszenzen

Definition 1.26

Ein Digraph $D = (V, A)$ heißt ein **Branching**, wenn er keine antiparallelen Bögen hat, der D zugrunde liegende ungerichtete Graph ein Wald ist und $|\delta^{\text{ein}}(v)| \leq 1$ für alle $v \in V$ gilt. Ein schwach zusammenhängendes Branching ist eine **Arboreszenz**.

Bemerkung 1.27

In einer Arboreszenz $D = (V, A)$ gibt es genau einen Knoten $r \in V$ mit $\mathrm{N}^{ein}(r) = \varnothing$. Er heißt die **Wurzel** *von D. Für jedes $v \in V$ gibt es einen eindeutigen r-v-Weg in D.*

Bemerkung 1.28

Eine Arboreszenz $D = (V, A)$ mit Wurzel $r \in V$ ist eindeutig bestimmt durch die Abbildung $p : V \setminus \{r\} \longrightarrow V$ mit $(p(v), v) \in A$.

Kürzeste-Wege Bäume

Definition 1.29

Für einen Digraphen $D = (V, A)$ und $s \in V$ bezeichnen wir mit $\mathrm{R}_D(s) \subseteq V$ die Menge alle Knoten $v \in V$, für die ein s-w-Weg in D existiert.

Korollar 1.30 (aus Satz 1.16)

Für einen Digraphen $D = (V, A)$ mit konservativen Bogenlängen $c \in \mathbb{R}^A$ und $s \in V$ gibt es eine Arboreszenz $T = (\mathrm{R}_D(s), A')$, so dass für jedes $v \in \mathrm{R}_D(s)$ der s-v-Weg in T ein c-kürzester s-v-Weg in D ist.

Definition 1.31

Eine Arboreszenz wie in Kor. 1.30 heißt ein **Kürzeste-Wege-Baum** (für D, c, s).

Kürzeste Wege in azyklischen Digraphen

Algorithmus 1.36 (Kürzeste Wege in azyklischen Digraphen)

Eingabe: *Azyklischer Digraph* $D = (V, A)$ *mit topologischer Sortierung* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $c \in \mathbb{Q}^A$, $\sigma \in [n]$

Ausgabe: *Für jeden Knoten* $v \in V \setminus \{v_\sigma\}$ *den Wert* $d(v) = \mathrm{dist}_c(v_\sigma, v)$ *und, falls* $d(v) \neq \infty$, *den letzten Bogen* $(p(v), v)$ *auf einem* v_σ*-*v*-Weg kürzester* c*-Länge (kürzeste-Wege Baum bzgl.* v_σ*)*

for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $d(v_i) \leftarrow \infty$
$d(v_\sigma) \leftarrow 0$
for $i = \sigma + 1, \ldots, n$ **do**
  $d(v_i) \leftarrow \min\{d(w) + c_{(w,v_i)} \mid w \in \mathrm{N}^{ein}(v_i)\}$
  $p(v_i) \leftarrow$ *ein* $w \in \mathrm{N}^{ein}(v_i)$ *mit* $d(v_i) = d(w) + c_{(w,v_i)}$
  ($p(v_i)$ *bleibt undefiniert, falls* $d(v_i) = \infty$ *oder* $\mathrm{N}^{ein}(v_i) = \emptyset$*)*

Dijkstras Algorithmus

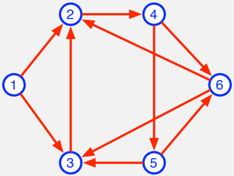
Algorithmus 1.38 (Dijkstra-Algorithmus)

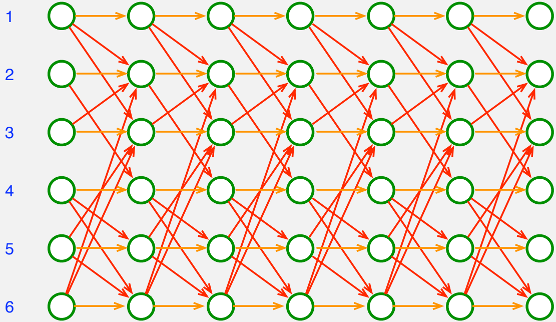
Eingabe: *Digraph* $D = (V, A)$, $c \in \mathbb{Q}_+^A$, $s \in V$

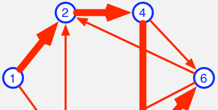
Ausgabe: *Für alle* $v \in V \setminus \{s\}$ *den Wert* $d(v) = \mathrm{dist}_c(s, v)$ *und, falls* $d(v) \neq \infty$, *den letzten Bogen* $(p(v), v)$ *auf einem* s-v-*Weg kürzester* c-*Länge*

1: **for all** $\{v \in V \setminus \{s\}\}$ **do**
2: $d(v) \leftarrow \infty$
3: $d(s) \leftarrow 0; F \leftarrow \emptyset$
4: *Bestimme* $v \in V \setminus F$ *mit* $d(v) = \min\{d(w) \,|\, w \in V \setminus F\}$
5: $F \leftarrow F \cup \{v\}$
6: **for all** $\{w \in \mathrm{N}^{aus}(v) \setminus F\}$ **do**
7:   **if** $\{d(w) > d(v) + c_{vw}\}$ **then**
8: $d(w) \leftarrow d(v) + c_{vw}$
9: $p(w) \leftarrow v$
10: **if** $\{F \neq V\}$ **then**
11:   *Gehe zu Schritt 4.*

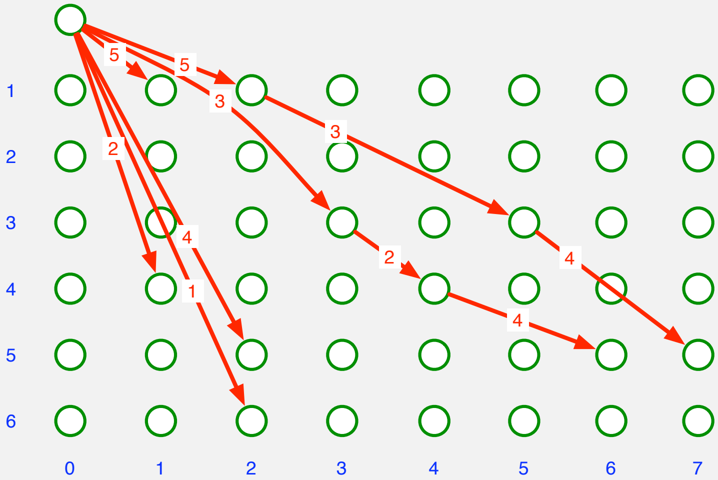
$BF(D)$





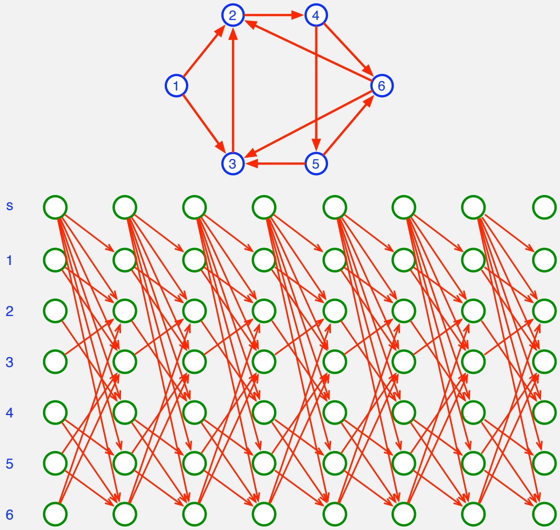


0/1-Knapsack



$a = (2, 1, 3, 1, 2, 2)$, $c = (5, 1, 3, 2, 4, 1)$, $\beta = 7$

$K(D)$



Beweis des Min Mean Cycle Satzes