Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2012/2013

1. Übung Kombinatorische Optimierung

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/kombopt2012/

Präsentation in den Übungen am 18.10.2012

Aufgabe 1

Betrachten Sie das *Bottleneck Problem*: Gegeben sei ein gewichteter Digraph $D = (V, A)$ mit nicht-negativen Bogenkapazitäten $c \in \mathbb{Q}_+^A$, sowie Knoten $s, t \in V$. Ist P ein s-t-Weg in D, so ist die kleinste Kapazität der in P auftretenden Kanten die Kapazität $c(P)$ des Weges, also

$$c(P) := \min\{c(a) : a \in A(P)\} \ .$$

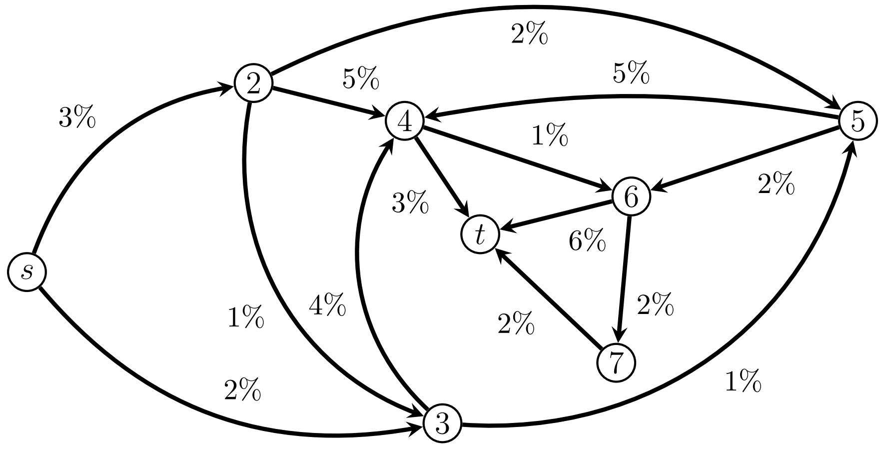
Das Problem besteht nun darin, unter allen s-t-Wegen denjenigen maximaler Kapazität zu finden. Geben Sie einen modifizierten Dijkstra-Algorithmus an, der das Bottleneck Problem für gegebene D, s, t, c lösen kann und analysieren Sie seine Laufzeit. Skizzieren Sie den Beweis seiner Korrektheit: Warum funktioniert Dijkstra für das Bottleneck Problem, aber nicht für kürzeste Wege mit negativen Gewichten? Was ist der Unterschied?

Aufgabe 2

Betrachten Sie das *Hamilton-Weg Problem*: Gegeben sei ein Digraph $D = (V, A)$ sowie verschiedene Knoten $s, t \in V$. Ein Hamilton-Weg von s nach t ist ein s-t-Weg, der jeden Knoten in V genau einmal besucht. Das Problem besteht darin, zu entscheiden, ob ein Hamilton-Weg von s nach t existiert.
Nehmen Sie nun an, sie hätten einen polynomiellen Algorithmus zur Lösung des Kürzeste-Wege Problems für *beliebige* Bogenlängen. Konstruieren Sie damit einen polynomiellen Algorithmus für das Hamilton-Weg Problem.

Aufgabe 3

Der folgende Graph abstrahiert ein Straßennetz. Dabei geben die Kantengewichte die (von einander unabhängigen) Wahrscheinlichkeiten an, bei Benutzung der Straßen zu verunfallen. Bestimmen Sie den sichersten Weg von s nach t, indem Sie ein geeignetes Kürzeste-Wege Problem aufstellen und lösen.



Aufgabe 4

Gegeben sei ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ und eine Länge $w_a(\tau) \in \mathbb{N}$ für jeden Bogen $a \in A$ und jeden Zeitpunkt $\tau \in \{0, 1, \ldots, T\}$ bis zu einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$. Die *Dauer* $\ell(W)$ eines Weges W, der aus einem Weg W' sowie dem letzten Bogen a besteht, ist definiert als

$$\ell(W) = \ell(W') + w_a(\ell(W')) \ ,$$

wobei die Dauer eines Weges mit kombinatorischer Länge 0 als 0 definiert wird. Für welches τ eine Länge $w_a(\tau)$ summiert wird, ist also durch den Ankunftszeitpunkt τ am Startknoten des Bogens a bestimmt. Am Anfang befindet man sich im Knoten s zum Zeitpunkt $\tau = 0$.

Konstruieren Sie eine Instanz des Problems, die zeigt, dass der Dijkstra-Algorithmus für dieses Kürzeste-Wege Problem nicht funktioniert.

Zeigen Sie, dass man eine Variante des Problems mittels Dijkstra trotzdem lösen kann, indem man kürzeste Wege auf einem Hilfsgraphen mit $\mathcal{O}(|V| \cdot (T + 1))$ Knoten berechnet. In der Variante sei das (beliebig lange) Warten an einem Knoten erlaubt.