Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2012/2013

3. Übung Kombinatorische Optimierung

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/kombopt2012/

Präsentation in den Übungen am 01.11.2012

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit nichtnegativen Knotengewichten $c \in \mathbb{Q}_+^V$, so dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ die Ungleichung

$$c_u + c_v \le 1 \tag{1}$$

erfüllt ist. Finden Sie einen Algorithmus, der durch $|V|$ Aufrufe von Dijkstra's Algorithmus in einem geeigneten Hilfsgraphen entscheidet, ob es einen Kreis C ungerader kombinatorischer Länge mit $\sum_{v \in V(C)} c_v > \frac{1}{2}(|V(C)| - 1)$ gibt.

Tipp: Der Hilfsgraph ist ungefähr doppelt so groß wie G und nutzt für die Kantengewichte exzessiv Eigenschaft (1) aus.

Aufgabe 2

Beweisen Sie das Fluss-Dekompositionstheorem: Ist $f \in \mathbb{R}_+^A$ ein s-t-Fluss in einem Netzwerk $(D = (V, A), u)$, so gibt es eine Menge $\mathcal{P}$ von s-t-Wegen und eine Menge $\mathcal{C}$ von Kreisen in D, sowie $w : \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ mit:

(i) $f_a = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \\ a \in Q}} w(Q)$ für alle $a \in A$.

(ii) $\operatorname{val}(f) = \sum_{Q \in \mathcal{P}} w(Q)$

(iii) $|\mathcal{P}| + |\mathcal{C}| \le |A|$

Falls $f \in \mathbb{Z}_+^A$ ist, kann man sogar $w : \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \to \mathbb{Z}_+$ wählen.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein Digraph $D = (V, A)$ und $M \in \mathbb{R}^{V \times A}$ die Knoten-Bögen-Inzidenzmatrix von D, sowie c die Anzahl der schwachen Zusammenhangskomponenten von D.
Zeigen Sie, dass der Rang von M gleich $|V| - c$ ist!

Tipp: Untersuchen Sie $\ker(M^\top)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Seien $D = (V, A)$ ein zusammenhängender Digraph, $s \neq t \in V$ zwei Knoten und $M \in \mathbb{R}^{V \times A}$ die Knoten-Bögen-Inzidenzmatrix von D. Wir nehmen an, dass ein Bogen $e_0 = (t, s)$ existiert. Alle Bögen außer e_0 haben weiterhin Kapazität 1, während e_0 eine "sehr große" Kapazität $U \approx \infty$ haben soll.

(a) Modellieren Sie das s-t-Max-Flow Problem als das Problem, eine Zirkulation mit maximalem Fluss durch den Bogen e_0 zu finden, d.h. formulieren Sie das entsprechende lineare Programm!

(b) Bestimmen Sie die zulässigen Basen dieses LPs!