Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2012/2013

4. Übung Kombinatorische Optimierung

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/kombopt2012/

Präsentation in den Übungen am 08.11.2012

Aufgabe 1

Beweisen Sie den Satz von Menger in der Knotenform: Seien $D = (V, A)$ ein Digraph und $s, t \in V$, $s = t$ zwei Knoten darin. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau dann k knotendisjunkte s-t-Wege in D (knotendisjunkt nur in inneren Knoten der Wege, also nicht in s und t), wenn für jede Teilmenge $W \subseteq V$ $(s, t \notin W)$ von Knoten mit $|W| \leq k - 1$ gilt, dass es einen s-t-Weg in $D \setminus W$ gibt.

Aufgabe 2

Sei S eine endliche Menge und 2^S ihre Potenzmenge. Eine Funktion $f : 2^S \to \mathbb{R}$ heißt *submodular*, wenn für alle Teilmengen $A, B \subseteq S$ gilt, dass

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B) \ .$$

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kantengewichten $c \in \mathbb{R}_+^E$.

(a) Beweisen Sie, dass die c-Kapazitätsfunktion von Schnitten

$$c : 2^V \to \mathbb{R}_+ \text{ via } W \mapsto c(W) := c(\delta(W)) = \sum_{e \in \delta(W)} c(e)$$

submodular ist.

(b) Beweisen Sie unter Verwendung von (a): Sind $\delta(S_1)$ und $\delta(S_2)$ minimale s-t-Schnitte mit $s \in S_1 \cap S_2$, so sind auch $\delta(S_1 \cap S_2)$ und $\delta(S_1 \cup S_2)$ minimale s-t-Schnitte.

(c) Sei $s, t \in v$, $s \neq t$ und $\delta(A)$ mit $s \in A$ ein minimaler s-t-Schnitt in G. Weiter seien $s', t' \in V \setminus A$ mit $s' \neq t'$. Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass es einen minimalen s'-t'-Schnitt $\delta(S)$ gibt, bei dem $A \subseteq S$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *Matching* ist eine Menge $M \subseteq E$ von Kanten, die paarweise nicht inzident sind, d.h. für alle $\{u, v\}, \{x, y\} \in M$ gilt immer $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$. Eine *Knotenüberdeckung* ist eine Teilmenge S der Knoten, so dass jede Kanten des Graphen zu mindestens einem Knoten in S inzident ist.
Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Graphentheorie mit Hilfe des Max-Flow-Min-Cut Theorems.

Satz von König. *In jedem bipartiten Graphen ist die maximale Kardinalität eines Matchings gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenüberdeckung.*

Tipp: Transformieren Sie das Problem, in einem bipartiten Graphen ein Matching maximaler Kardinalität zu finden, in ein Max-Flow Problem.

Aufgabe 4

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *perfektes Matching* ist ein Matching $M \subseteq E$ (d.h. für alle $\{u, v\}, \{x, y\} \in M$ gilt $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$) für das $2|M| = |E|$ (d.h. $\bigcup_{e \in M} e = V$) gilt. Mit $N(W) = \{v \in V : \exists w \in W \text{ mit } \{v, w\} \in E\}$ sei die Nachbarschaft einer Knotenmenge $W \subseteq V$ bezeichnet.
Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Graphentheorie mit Hilfe des Max-Flow-Min-Cut Theorems.

Satz von Hall. *Ein bipartiter Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn $|N(W)| \geq |W|$ für alle $W \subseteq V$ gilt.*