Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2012/2013

5. Übung Kombinatorische Optimierung

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/kombopt2012/

Präsentation in den Übungen am 15.11.2012

Aufgabe 1

Konstruieren Sie jeweils ein s-t-Max-Flow Problem mit zugehörigem Netzwerk, bei dem

(a) nach einem geeigneten ersten Augmentationsschritt die Länge eines nun kürzesten augmentierenden Weges abgenommen hat;

(b) die Anzahl von Augmentierungen mit kürzesten augmentierenden Wegen größer ist als die Anzahl von Augmentierungen mit augmentierenden Wegen größter Kapazität;

(c) die Kapazität von kürzesten augmentierenden Wegen streng monoton wächst.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein s-t-Max-Flow Problem mit Netzwerk $((V,A),u)$ mit ganzzahligen Kapazitäten $u \in \mathbb{Z}_+^A$. Weiterhin sei ein zugehöriger ganzzahliger maximaler Fluss f gegeben. Nun wird die Kapazität eines einzelnen Bogens $(v,w) \in A$

(a) um eine Einheit erhöht.

(b) um eine Einheit abgesenkt.

Wie bestimmen Sie jeweils in $\mathcal{O}(|V| + |A|)$ Zeit einen neuen maximalen Fluss?

Aufgabe 3

Das *Partitions-Problem* ist ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem, bei dem eine Menge von natürlichen Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ gegeben ist und entschieden werden soll, ob es eine Teilmenge $S \subseteq [n]$ gibt, so dass $\sum_{i \in S} c_i = \sum_{i \notin S} c_i$ gilt.

Führen Sie das Partitions-Problem auf das Problem zurück, für ein gegebenenes Netzwerk und einen Parameter k festzustellen, ob es einen maximalen Fluss gibt, der sich in höchstens k Wege zerlegen lässt. Konstruieren Sie dafür ein Netzwerk mit $n+2+2$ Knoten, in dem unter anderen die c_i als Bogenkapazitäten auftreten und ein maximaler s-t-Fluss immer Flusswert $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$ hat.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Bei einem *Terminal Assignment Problem* ist eine zentrale CPU gegeben, eine Menge von Konzentratoren $\{K_1, \ldots, K_p\}$ und eine Menge von Terminals $\{T_1, \ldots, T_q\}$. Ein Terminal T_j kann direkt an die CPU zu Kosten $w_{0,j}$ angeschlossen werden oder zu Kosten $w_{i,j}$ an den Konzentrator K_i, von dem aus die weitere Verbindung zur CPU erfolgt (wir nehmen an, dass diese Verbindung zwischen Konzentrator und CPU bereits hergestellt ist und keine neuen Kosten verursacht). Ein Konzentrator kann höchstens $C \in \mathbb{N}$ viele Terminals bedienen.
Formulieren Sie das Problem, alle Terminals an die CPU zu minimalen Kosten anzuschließen, als ein Problem, eine minimal gewichtete (ganzzahlige) Zirkulation in einem geeigneten Netzwerk mit ganzzahligen Kapazitäten zu finden.