Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2012/2013

6. Übung Kombinatorische Optimierung

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/kombopt2012/

Präsentation in den Übungen am 22.11.2012

Aufgabe 1

Betrachten Sie das Problem, in einem bipartiten ungerichteten Graphen $G = (V \cup W, E)$ mit Kantenkosten $c \in \mathbb{Q}^E$ ein gewichtsminimales perfektes Matching zu finden. Formulieren Sie das Problem als Min-Cost-Flow Problem (d.h. als das Problem, eine kostenminimale Zirkulation in einem geeigneten Netzwerk zu finden)!

Aufgabe 2

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph und $l, u \in \mathbb{Q}_+^A$ mit $l \leq u$. Zeigen Sie: Man kann eine Zirkulation in Circ(D, l, u) finden oder feststellen, dass Circ(D, l, u) leer ist, indem man ein Max-Flow Problem auf einem Fluss-Netzwerk mit $|V| + 2$ Knoten und $|A| + 2|V|$ Bögen löst.

Aufgabe 3

Seien $((V, A), u)$ ein Netzwerk und $s, t \in V$, $s \neq t$ zwei Knoten darin. Die Grundidee des *Dinic Algorithmus* zum Lösen des s-t-Max-Flow Problems besteht darin, statt den Fluss nur auf augmentierenden Wegen zu erhöhen, einen augmentierenden Fluss zu finden. Wir wollen diesen Algorithmus in Phasen aufteilen.
In einer Phase $i \in \mathbb{N}$ geschieht Folgendes: sei D_f das Residualnetzwerk zum aktuellen Fluss f und d_{D_f} die kombinatorische Distanz vom Knoten s darin. Statt des ganzen Residualnetzwerkes wird nun der *Level Graph* D_f^L mit Knotenmenge $V(D_f^L) := V$ und Bögenmenge

$$A(D_f^L) := \left\{(v, w) \in A(D_f) : d_{D_f}(w) = d_{D_f}(v) + 1\right\}$$

konstruiert. Nun wird in D_f^L ein *blockierender Fluss* f' bestimmt, d.h. in D_f^L gibt es keinen Weg W mehr, der nur aus Bögen $(v, w) \in A(D_f^L)$ mit $f'(u, v) < c_{D_f}(u, v)$ besteht. Der neue Fluss ergibt sich dann aus $f + f'$. Beweisen Sie, dass

(a) der Level Graph D_f^L in $\mathcal{O}(|A|)$ Zeit konstruiert werden kann;

(b) ein blockierender Fluss f' in augmentierende Wege der gleichen Länge ℓ_i zerlegt werden kann;

(c) über die einzelnen Phasen diese Länge ℓ_i streng monoton wächst, und es daher höchstens $|V|$ Phasen gibt (Überlegen Sie sich dafür, dass die Distanzen d nicht fallen.);

(d) ein blockierender Fluss in $\mathcal{O}(|V| \cdot |A|)$ Schritten gefunden werden kann.

Geben Sie weiterhin ein Beispiel an, das zeigt, dass ein blockierender Fluss nicht notwendig maximal sein muss.