Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2012/2013

8. Übung Kombinatorische Optimierung

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/kombopt2012/

Präsentation in den Übungen am 06.12.2012

Aufgabe 1
Wir betrachten den vollständigen Graphen K_n mit n Knoten und Kantenmenge E_n, sowie Kantenkosten $c \in \mathbb{R}^{E_n}$.

(a) Wieviele perfekte Matchings hat der vollständige Graph K_n?

(b) Wir ziehen ein perfektes Matching M zufällig gleichverteilt aus allen perfekten Matchings von K_n. Gegeben eine Kante $e \in E_n$, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass M die Kante e enthält?

(c) Was sind die erwarteten Kosten eines so zufällig gezogenen perfekten Matchings?

Tipp: Nutzen Sie die Linearität des Erwartungswertes!

(d) Zeigen Sie: Es gibt ein perfektes Matching mit Kosten von höchstens

$$\frac{1}{n-1} \sum_{c \in E_n} c_e \ .$$

Aufgabe 2
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit konservativen Kantengewichten $c \in \mathbb{Q}^E$ und $s, t \in V$. Gesucht ist ein c-kürzester s-t-Weg mit ungerader Kantenzahl. Führen Sie das Problem auf ein perfektes Matching Problem zurück.
Tipp: Konstruieren Sie einen Graphen H mit $2|V| - 2$ Knoten und ca. $2|E| + |V|$ Kanten.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass ein k-regulärer (d.h. jeder Knoten hat konstanten Grad k) bipartiter Graph in k disjunkte perfekte Matchings zerlegt werden kann. Zeigen Sie damit, dass ein bipartiter Graph G mit Maximalgrad $\Delta(G) = k$ in k disjunkte Matchings zerlegt werden kann.

Aufgabe 4
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kosten $c \in \mathbb{R}^E$ und M ein Matching in G. Ein Kreis $C = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ als Folge von Kanten heißt *alternierend* bezüglich M, falls seine Kanten abwechselnd zu M und nicht zu M gehören, also $e_1, e_3, \ldots, e_{k-1} \in M$ und $e_2, e_4, \ldots, e_k \notin M$. Die Kosten eines alternierenden Kreises C sind gegeben durch

$$c(C) := \sum_{e \in C \setminus M} c_e - \sum_{e \in C \cap M} c_e \ .$$

Beweisen Sie: Ein gegebenes perfektes Matching M ist genau dann kostenminimal, wenn es keinen alternierenden Kreis C bezüglich M mit negativen Kosten gibt.