Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2012/2013

9. Übung Kombinatorische Optimierung

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/kombopt2012/

Präsentation in den Übungen am 13.12.2012

Aufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $P_{\text{match}}(G)$ das zugehörige perfekte Matching-Polytop.
Zeigen Sie, dass zwei Ecken $\chi(M_1)$ und $\chi(M_2)$ genau dann adjazente Ecken des perfekten Matching-Polytops sind, wenn die symmetrische Differenz $M_1 \Delta M_2$ ein alternierender Kreis ist.

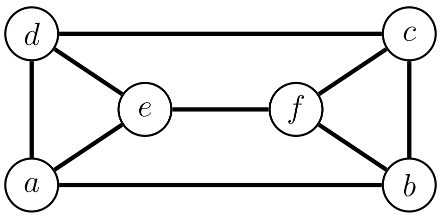
Aufgabe 2

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $e^* \in E$ eine Kante. Zeigen Sie

$$\operatorname{conv}\left(\{\chi(M) : M \text{ Matching in } G \text{ und } e \in M\}\right) = P_{\text{match}} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^E : x_{e^*} = 1\right\} .$$

Tipp: Frischen Sie Ihr Wissen über Seiten von Polyedern auf.

Aufgabe 3



Gegeben sei der hier abgebildete Graph $G = (V, E)$.
Bestimmen Sie eine Kostenfunktion $c \in \mathbb{R}^E$ derart, dass es einen eindeutigen Vektor $\hat{x} \in [0, 1]^E$ gibt, der c über alle $x \in \mathbb{R}^E_+$ minimiert, welche die Gradgleichungen $x(\delta(v)) = 1$ für alle $v \in V$ erfüllen. Weiterhin soll $\hat{x}$ nicht im perfekten Matching-Polytop liegen! Zeigen Sie dazu, dass das bezüglich c kostenminimale perfekte Matching strikt größere Kosten hat.

Aufgabe 4

Ein Assistent hat für eine Übungsstunde mit n Studierenden eine Liste mit n Aufgaben vorbereitet. Jeder Studierende soll genau eine Aufgabe vorrechnen. Dafür hat jeder Studierende sich eine Präferenzliste, welche Aufgabe er am liebsten rechnen möchte, am zweitliebsten usw. Andererseits hat der Übungsleiter für jede Aufgabe eine Liste angelegt, die voraussagt, wieviel Zeit ein Studierender für diese Aufgabe voraussichtlich benötigen wird. Die Zeitangaben auf einer solchen Liste sind paarweise verschieden. Eine Zuordnung der Aufgaben zu den Studierenden heißt nun *ideal*, wenn kein Student eine Aufgabe, die er lieber gerechnet hätte und auch noch schneller als derjenige, der sie schließlich rechnet, nicht bekommt.
Betrachten Sie nun folgenden Algorithmus zur Bestimmung einer Zuordnung der Aufgaben: Es gebe zum einen eine Liste von Studierenden L, die noch keine Aufgabe bekommen haben. Diese enthält am Anfang alle Studierenden. Damit wird nun folgender Schritt iteriert:
Ein beliebiger Studierender in L wird gewählt und von L gestrichen. Er wählt von seiner Liste die Aufgabe, die er am liebsten möchte. Ist die Aufgabe noch frei, bekommt er sie zugewiesen, ist sie jedoch schon an jemand anderen vergeben, so wird die Aufgabe an denjenigen der beiden vergeben, der sie schneller rechnen kann. In diesem Fall wird der Studierende, der leer ausgegangen ist, wieder auf L gesetzt, und er streicht die Aufgabe, die ihm entgangen ist, von seiner Präferenzliste.

(a) Übersetzen Sie die Aufgabe in ein perfektes Matching Problem mit besonderen Nebenbedingungen.

(b) Zeigen Sie, dass das vorgeschlagene Verfahren mit einer idealen Zuordnung terminiert.

(c) Schätzen Sie die Laufzeit des Verfahrens ab.