

10. Übung Kombinatorische Optimierung

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/kombopt2012/

Präsentation in den Übungen am 20.12.2012

Aufgabe 1

Sei $K_n = (V_n, E_n)$ ein vollständiger Graph mit n Knoten für n gerade. Sei ferner $P_{\text{match}}^{\text{perf}}(K_n)$ das zugehörige perfekte Matching-Polytop. Zeigen Sie, dass jede Blütenungleichung

$$x(E(U)) \leq \frac{|U| - 1}{2} \quad U \subseteq V, 3 \leq |U| \leq |V| - 3, |U| \text{ ungerade}$$

eine Facette des Polytops beschreibt. Konstruieren Sie dazu für eine beliebige Blütenungleichung einen Punkt $x \in \mathbb{R}_+^E$, der alle Gradgleichungen und alle Blütenungleichungen außer der betrachteten erfüllt.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für gerades $n \in \mathbb{N}$ die Dimension des perfekten Matching-Polytops $P_{\text{match}}^{\text{perf}}(K_n)$ für den vollständigen Graphen K_n mit n Knoten. Sie dürfen dazu annehmen, dass die Blütenungleichungen Facetten definieren.

Aufgabe 3

Sei d eine ungerade positive Zahl und $G = (V, E)$ ein $(d - 1)$ -kantenzusammenhängender d -regulärer Graph. Das heißt, es gibt zwischen je zwei Knoten $d - 1$ kantendisjunkte Wege und jeder Knoten hat konstanten Grad d .

Zeigen Sie den Satz von Petersen, der besagt, dass dann G ein perfektes Matching besitzt.

Tipp: Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Menger, dass das perfekte Matching-Polytop nicht leer ist.

Aufgabe 4

Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt *stabil*, wenn der von S induzierte Untergraph keine Kanten besitzt. Eine Knotenmenge $C \subseteq V$ heißt *Clique*, wenn der von C induzierte Untergraph vollständig ist.

Seien nun $C_1, \dots, C_n \subseteq V$ Cliques eines Graphen $G = (V, E)$, so dass $\bigcup_{i=1}^n C_i = V$ gilt und jede Kante $e \in E$ innerhalb (mindestens) einer Clique C_i verläuft. Weiterhin seien die C_i derart, dass jeder Knoten $v \in V$ in höchstens zwei der C_i ist.

Führen Sie das Problem, eine kardinalitätsmaximale stabile Menge in G zu finden auf ein Matching-Problem in einem geeigneten Hilfsgraphen zurück.