Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2012/2013

11. Übung Kombinatorische Optimierung

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/kombopt2012/

Präsentation in den Übungen am 17.01.2013

Wegen der geringen Übungsbeteiligung gibt es in diesem Jahr leider keine Weihnachtsaufgabe.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit Hilfe von Satz 3.43 die Tutte-Berge-Formel:
Für jeden Graphen $G = (V, E)$ ist die maximale Kardinalität $\nu(G)$ eines Matchings gleich

$$\min\left\{\frac{1}{2}\left(|V| + |U| - \text{odd}\left(G \setminus U\right)\right) : U \subseteq V\right\} ,$$

wobei odd$(\cdot)$ die Zusammenhangskomponenten ungerader Kardinalität zählt. Zeigen Sie dazu, dass es ein minimales odd-set cover $W_0, \dots, W_k$ gibt, für das die W_i paarweise disjunkt sind.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die im Folgenden auf verschiedene Arten definierte Menge $\mathcal{I}$.

(a) Gegeben eine $m \times n$ Matrix A über einem Körper $\mathcal{F}$. $\mathcal{I}$ sei die Menge aller Mengen $I \subseteq [n]$, so dass die Spalten in I linear unabhängig über $\mathcal{F}$ sind.

(b) Gegeben ein $a \in \mathbb{R}^n_+$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$. $\mathcal{I}$ ist die Menge aller Mengen $I \subseteq [n]$ mit $\sum\limits_{i \in I} a_i \leq \alpha$.

(c) Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. $\mathcal{I}$ sei die Menge aller stabilen Mengen S in G, d.h. Mengen $S \subseteq V$ mit $E(S) = \emptyset$.

(d) Gegeben sei ein Graph G. $\mathcal{I}$ sei die Menge aller Kantenmengen von Wäldern (= Teilgraphen ohne Kreis) in G.

(e) Gegeben sei ein zusammenhängender Graph G. $\mathcal{I}$ sei die Menge aller Kantenmengen F, für die $G \setminus F$ zusammenhängend ist.

(f) Gegeben seien $r \in \mathbb{N}$ und eine Menge E. $\mathcal{I}$ sei die Menge aller höchstens r-elementigen Teilmengen von E.

Für jede der obigen Mengen $\mathcal{I}$, beweisen oder widerlegen Sie die Axiome (1) und (2) sowie nach Wahl (3) oder (3'):

(1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(2) Ist $X \in \mathcal{I}$ und gilt $Y \subseteq X$, so gilt auch $Y \in \mathcal{I}$.

(3) Sind $X, Y \in \mathcal{I}$ und gilt $|Y| > |X|$, so existiert $y \in Y \setminus X$ mit $X \cup \{y\} \in \mathcal{I}$.

(3') Für jede Menge T existiert eine natürliche Zahl $r(T)$ mit der folgenden Eigenschaft: Alle inklusions-maximalen Teilmengen $X \subseteq T$ mit $X \in \mathcal{I}$ haben Kardinalität $r(T)$.