Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2012/2013

12. Übung Kombinatorische Optimierung

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/kombopt2012/

Präsentation in den Übungen am 24.01.2013

Aufgabe 1

Beweisen Sie Bemerkung 4.8 aus der Vorlesung: Ist $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ ein Unabhängigkeitssystem, für das der Greedy-Algorithmus für jede Gewichtsfunktion $w \in \mathbb{N}^E$ eine w-maximale unabhängige Menge berechnet, so ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid.

Aufgabe 2

Beweisen Sie den interessanten Teil von Satz 4.15 aus der Vorlesung: Die Rang-Funktion eines Matroids $(E, \mathcal{I})$ ist submodular.

Tipp: Betrachten Sie dazu beliebige Mengen $X, Y \subseteq E$, eine inklusionsmaximale unabhängige Menge $J \subseteq X \cap Y$ und erweitern Sie diese zu inklusionsmaximalen unabhängigen Mengen $J_X \subseteq X$ und $J_Y \subseteq Y$.

Aufgabe 3

Gegeben sei eine endliche Grundmenge E und eine Kollektion von Teilmengen $\mathcal{S} \subseteq 2^E$. Eine *partielle Transversale* $T \subseteq E$ ist eine Menge von Elementen, so dass T derart mittels f injektiv nach $\mathcal{S}$ abgebildet werden kann, dass $t \in f(t)$ für alle $t \in T$ gilt. (Kann T sogar bijektiv nach $\mathcal{S}$ abgebildet werden, so heißt T *Transversale*.)
Zeigen Sie, dass die Menge der partiellen Transversalen ein Matroid über E bildet.

Aufgabe 4

Sind $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ und $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ zwei Matroide, so ist der Schnitt der beiden Matroide definiert als $M_1 \cap M_2 = (E, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$. Analog definiert man Schnitte von mehr als zwei Matroiden. (Achtung: Schnitte von Matroiden sind im Allgemeinen nicht selbst Matroide!)
Gegeben sei ein Digraph $D = (V, A)$ und $s, t \in V$. Zeigen Sie, dass die Menge aller Mengen knotendisjunkter Wege und Kreise, die nicht in s hineinführen und nicht aus t hinausführen, als Schnitt zweier Matroide aufgefasst werden kann.

Tipp: Benutzen Sie jeweils ein Transversalmatroid für s und eines für t.

Wieso zeigt das, dass das Optimieren über den Schnitt dreier Matroide im Allgemeinen $\mathcal{NP}$-schwer ist?

Aufgabe 5

Formulieren Sie das Max-Cut-Problem auf dem vollständigen Graphen K_n mit n Knoten als ganzzahliges Optimierungsproblem. Führen Sie dazu für jede Kante eine Indikatorvariable ein und betrachten Sie Dreiecke.

Da Max-Cut $\mathcal{NP}$-schwer ist, dürfen Sie davon ausgehen, dass die Ganzzahligkeitsbedingungen in Ihrer Beschreibung notwendig sind. Wie passt dies zum Fakt, dass man Min-Cut-Probleme in Polynomialzeit lösen kann?