Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2012/2013
Prof. Volker Kaibel, Jun.-Prof. Gennadiy Averkov

3. Übung zur Vorlesung
Komplexitätstheorie

(Besprechung am 8.11.2012)

1. Aufgabe

Zeigen Sie $L_1 \cup L_2 \in \mathsf{NP}$ für alle $L_1, L_2 \in \mathsf{NP}$.

2. Aufgabe

Einen Digraphen G nennen wir (in dieser Aufgabe) eine Kette der Länge $k \in \mathbb{N}$, falls G genau $k+1$ Knoten und $2k$ Kanten besitzt und eine Anordnung $u_0, u_1, \ldots, u_k$ der Knoten von G existiert, sodass jeder Bogen von G entweder die Form (u_i, u_{i+1}) oder (u_{i+1}, u_i) hat, wobei $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Die Knoten u_0 und u_k nennen wir dabei die Endknoten der Kette G. Wir benutzen für die Kette G wie oben die Bezeichnung $c(u_0, \ldots, u_k)$.

Ein Hamiltonpfad in einem Digraphen G ist ein Pfad, der jeden Knoten von G genau ein Mal besucht. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\mathsf{dHAMPATH} := \{G : G \text{ ist ein Digraph und besitzt einen Hamiltonpfad}\}$$

NP-vollständig ist. Dafür sollen Sie die folgenden Aussagen verifizieren:

(a) $\mathsf{dHAMPATH} \in \mathsf{NP}$.

(b) SAT ist polynomial reduzierbar zu $\mathsf{dHAMPATH}$.

Um die Aussage (b) zu verifizieren, benutzen Sie die Abbildung $\phi \mapsto G$, die einer CNF ϕ mit n Variablen $u_1, \ldots, u_n$ und m Klauseln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ den Digraphen G zuordnet, der auf folgende Weise konstruiert wird:

1. In G führt man $n+2$ disjunkte Ketten $c_i := c(u_{i,0}, \ldots, c_{i,2m+1})$, $i \in \{0, \ldots, n+1\}$, der Länge $2m+1$ ein.
2. Für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ verbindet man mit einem Bogen jeden der zwei Endknoten der Kette c_i zu jedem der zwei Endknoten der Kette c_{i+1}.
3. In G führt man m neue Knoten $w_1, \ldots, w_m$ ein und erstellt folgende Verbindungen zwischen den Ketten $c_1, \ldots, c_n$ und diesen neuen Knoten:

- Falls für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$ die Variable u_i ohne Negation in α_j auftritt, dann werden zum Graphen G die Bögen $(u_{i,2j-1}, w_j)$ und $(w_j, u_{i,2j})$ hinzugefügt.
- Falls für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$ die Negation der Variable u_i in α_j auftritt, dann werden zum Graphen G die Bögen $(u_{i,2j}, w_j)$ und $(w_j, u_{i,2j-1})$ hinzugefügt.

3. Aufgabe

Ein Hamiltonpfad in einem ungerichteten Graphen G ist ein ungerichteter Pfad, der jeden Knoten von G genau ein Mal besucht. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\mathsf{HAMPATH} := \{G : G \text{ ist ein ungerichteter Graph und besitzt einen Hamiltonpfad}\}$$

NP-vollständig ist.