Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2012/2013
Prof. Volker Kaibel, Jun.-Prof. Gennadiy Averkov

4. Übung zur Vorlesung
Komplexitätstheorie

(Besprechung am 15.11.2012)

1. Aufgabe

Zeigen Sie die folgende Implikation: Falls eine NP-schwere Sprache L mit $L \subseteq \{1\}^*$ existiert, dann gilt $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Hinweis: Sei $\phi = \phi(u_1, \ldots, u_t)$ eine CNF-Formel mit t Variablen $u_1, \ldots, u_t$ und sei die Kodierungslänge von ϕ höchstens $n \in \mathbb{N}$. Die Formel $\phi(u_1, \ldots, u_t)$ ist genau dann erfüllbar, wenn die Formel $\phi(u_1, \ldots, u_{t-1}, 0)$ oder $\phi(u_1, \ldots, u_{t-1}, 1)$ erfüllbar ist. Diese Beobachtung führt zu einem (rekursiven) Algorithmus für SAT, der $O(2^t)$ Formeln der Länge höchstens n generiert. Wenn eine NP-schwere Sprache mit $L \subseteq \{1\}^*$ existiert, dann könnte der oben beschriebene Ansatz optimiert werden: Man könnte dann mit Hilfe einer polynomialen Reduktion von SAT auf L einen Algorithmus entwickeln, der durch das Fixieren der Variablen aus $\{u_1, \ldots, u_t\}$ Erfüllbarkeit von ϕ in polynomialer Zeit entscheidet.

2. Aufgabe

Zeigen Sie NP-Vollständigkeit der folgenden Entscheidungsprobleme:

HSET: Gegeben ist eine endliche Menge $S \subseteq \mathbb{N}$, eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und eine endliche Folge $A_1, \ldots, A_m$ von Teilmengen der Menge S. Man entscheide, ob eine Menge $A \subseteq S$ mit $|A| \leq k$ und $A \cap A_i \neq \emptyset \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ existiert.

CSET: Gegeben ist eine endliche Menge $S \subseteq \mathbb{N}$, eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und eine endliche Folge $A_1, \ldots, A_m$ von Teilmengen der Menge S. Man entscheide, ob eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $|I| \leq k$ und $\bigcup_{i \in I} A_i = S$ existiert.

Hinweis: Man kann SAT zu HSET polynomial reduzieren, indem man für eine CNF-Formel ϕ mit Variablen $u_1, \ldots, u_t$ die Menge $\{u_1, \ldots, u_t, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_t}\}$ als die Menge S aus dem Entscheidungsproblem HSET interpretiert. HSET kann zu CSET polynomial reduziert werden.

3. Aufgabe

Zeigen Sie NP-Vollständigkeit der folgenden Entscheidungsprobleme:

SAT3: Man entscheide Erfüllbarkeit einer gegebenen CNF-Formel, in der jede Variable in höchstens drei Klauseln benutzt wird.

CSET3: Gegeben ist eine endliche Menge $S \subseteq \mathbb{N}$, eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und endlich viele Teilmengen $A_1, \ldots, A_m$ von S mit $|A_i| \leq 3$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. Man entscheide, ob eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $|I| \leq k$ und $\bigcup_{i \in I} A_i = S$ existiert.