Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Wintersemester 2012/2013
Prof. Volker Kaibel, Jun.-Prof. Gennadiy Averkov

5. Übung zur Vorlesung

Komplexitätstheorie

(Besprechung am 22.11.2012)

1. Aufgabe

Nehmen wir an, es existiere ein Algorithmus A zur Lösung von SAT, der für die überwiegende Mehrheit der SAT-Instanzen mit der Kodierungslänge $\leq n$ die Erfüllbareit von ϕ in polynomialer Zeit überprüfen könnte. Genauer nehmen wir an, dass ein Polynom p existiere, sodass A auf höchstens $2^{o(n)}$ Strings der Länge $\leq n$ in mehr als $p(n)$ Schritten terminiert. Zeigen Sie, dass man in diesem Fall auch einen Algorithmus B zur Lösung von SAT entwickeln kann, der auf *allen* Strings der Länge $\leq n$ in weniger als $2^{o(n)}$ Schritten terminiert (d.h., B ist wesentlich schneller als das direkte Lösungsverfahren auf der Basis der vollständigen Aufzählung aller Belegungen).

2. Aufgabe

Zeigen Sie NP-Vollständigkeit der folgenden Entscheidungsprobleme.

1. Gegeben sind m endliche Mengen $A_1, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{N}$ ($m \in \mathbb{N}$), eine endliche Menge $S \subseteq \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq |S|$. Man entscheide, ob eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ der Kardinalität k existiert, sodass sich S als disjunkte Vereinigung der Mengen A_i mit $i \in I$ darstellen lässt.
2. Gegeben sind m endliche Mengen $A_1, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{N}$ ($m \in \mathbb{N}$) und eine endliche Menge $S \subseteq \mathbb{N}$. Man entscheide, ob eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ existiert, sodass sich S als disjunkte Vereinigung der Menge A_i mit $i \in I$ darstellen lässt.

3. Aufgabe

Man betrachte folgendes Entscheidungsproblem. Gegeben sind m natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ ($m \in \mathbb{N}$) und eine natürliche Zahl $b \in \mathbb{N}$. Man entscheide, ob eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $b = \sum_{i \in I} a_i$ existiert. Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. Das oben beschriebene Entscheidungsproblem ist NP-vollständig, falls die Zahlen $a_1, \ldots, a_m, b$ im Binärsystem dargestellt werden.
2. Das oben beschriebene Entscheidungsproblem ist polynomial lösbar, falls die Zahlen $a_1, \ldots, a_m, b$ im Unärsystem dargestellt werden.