Vorlesung
Mathematik für Ingenieure
(WS 11/12, SS 12, WS 12/13)

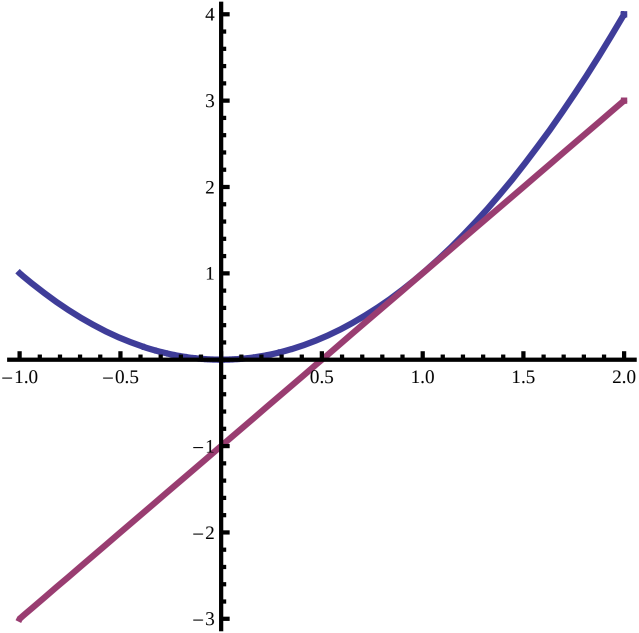
Kapitel 9: Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 3. Juli 2012)

Differenzialrechnung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Differenzierbarkeit $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definition 9.1

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ ist in $x^\star \in G$ **differenzierbar**, wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, so dass für die affine Abbildung

$$\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \ell(x) = f(x^\star) + A \cdot (x - x^\star)$$

gilt:

$$\lim_{x \to x^\star} \frac{\ell(x) - f(x)}{\|x - x^\star\|} = \mathbb{O}_m$$

Das Differenzial

Bemerkung 9.2

Wenn $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ in $x^\star \in G$ differenzierbar ist, dann gibt es nur eine Matrix A wie in der Definition 9.1. Sie heißt dann

- *Ableitung(smatrix)*
- *(totales) Differenzial*
- *Funktionalmatrix*

von f in $x^\star$. Schreibweisen:

$$f'(x^\star) := A \qquad \mathrm{d}_{x^\star}(f) := A \qquad \mathrm{d}_{x^\star} f := A$$

Stetigkeit differenzierbarer Abbildungen

Satz 9.3

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$.

Satz 9.4

Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x^\star$, so ist f auch stetig in $x^\star$.

Bemerkung 9.5

Stetigkeit impliziert aber **nicht** *unbedingt Differenzierbarkeit.*

Komponentenfunktionen

Bemerkung 9.6

Eine Abbildung

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \ : \ \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$$

ist genau dann in $x \in G$ *differenzierbar, wenn alle Komponentenfunktionen* $f_i : G \to \mathbb{R}$ *in* x *differenzierbar sind. Die Zeilen von* $f'(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *sind dann die Ableitungsmatrizen* $f_1'(x), \ldots,$ $f_m'(x) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ *von* $f_1, \ldots, f_m$.

Richtungsableitungen

Definition 9.7

Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$, so heißt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) := f'(x) \cdot v \in \mathbb{R}^m$$

die **Richtungsableitung** von f im Punkt x in Richtung v.

Partielle Ableitungen

Definition 9.8

Die j-te **partielle Ableitung** von $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ im Punkt $x \in G$ ist die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \mathbb{e}_j}(x)$ in Richtung des j-ten Einheitsvektors, also

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t}$$

(falls der Grenzwert existiert).

Partielle Ableitungen und Komponentenfunktionen...

Existiert für $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \supseteq G \to R^m$ die j-te partielle Ableitung im Punkt $x \in G$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix}.$$

. . . Partielle Ableitungen und Komponentenfunktionen

Dabei ist $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ die Ableitung der i-ten Komponentenfunktion bezüglich der j-ten Variablen an der Stelle x_j (wobei man die anderen Variablen auf $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ fixiert), also

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = g'(x_j)$$

mit

$$g(t) = f_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)\,.$$

Funktionalmatrix und partielle Ableitungen

Satz 9.9

Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar in* $x \in G$*, so ist*

$$f'(x) = \mathrm{d}_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Hinreichendes Differenzierbarkeitskriterium

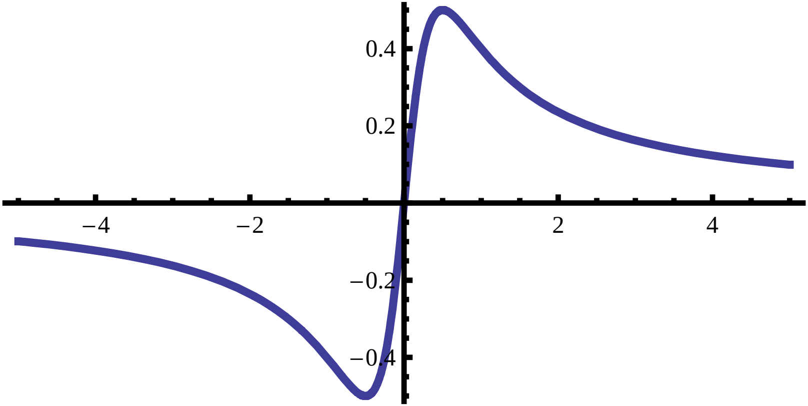
Satz 9.10

Existieren für $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ alle partiellen Ableitungen in jedem Punkt $x \in G$ und sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : G \to \mathbb{R}$$

als durch $x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ definierte Funktionen stetig, so ist f in allen Punkten von G (total) differenzierbar.

$$f(0.5, x_2) = \frac{0.5x_2}{0.25+x_2^2}$$



Der Gradient von $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$

Definition 9.11

Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ $(m = 1)$ differenzierbar, so heißt der Vektor

$$\operatorname{grad}_x f := \nabla_x f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$$

der **Gradient** von f in x. Als Zeilenvektor aufgefasst ist der Gradient die Ableitungsmatrix von f in $x \in G \subseteq \mathbb{R}^n$.

Das Gradientenfeld

Für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f : G &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \operatorname{grad}_x f \end{aligned}$$

ein Vektorfeld, das **Gradientenfeld** von f.

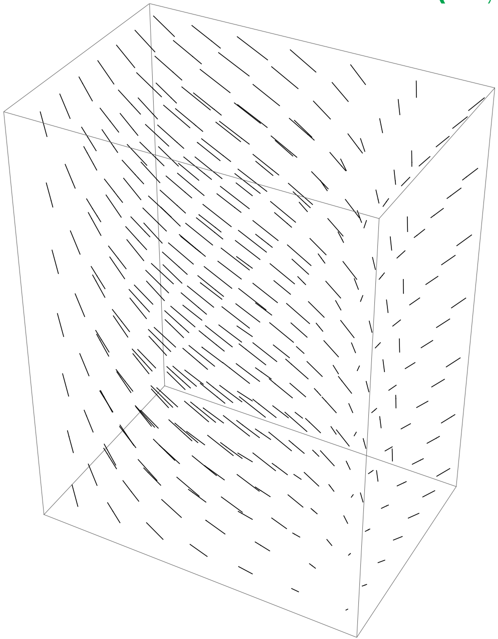
Eigenschaften des Gradienten

Bemerkung 9.12

Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ *differenzierbar.*

- *Der Gradient* $\operatorname{grad}_x f$ *von* f *in* $x \in G$ *weist in Richtung des stärksten Anstiegs von* f *in* x*.*
- *Die Steigung in Richtung* $\operatorname{grad}_x f$ *(also die Richtungsableitung für* $v = \frac{1}{\|\operatorname{grad}_x f\|} \operatorname{grad}_x f$*) ist* $\|\operatorname{grad}_x f\|$ *(falls* $\operatorname{grad}_x f \neq \mathbb{O}_n$*).*
- *Der Gradient* $\operatorname{grad}_x f$ *steht orthogonal auf der Niveaumenge von* f *in* x*.*
- $(-\operatorname{grad}_x f, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *ist Normalenvektor für die Tangential(hyper)ebene an den Graphen von* f *über dem Punkt* x*.*

Gradientenfeld von $h = z - f(x, y)$



Pfaffsche Formen

Definition 9.13

Für Funktionen $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ heißt

$$g_1 \cdot \mathrm{d}\, x_1 + \cdots + g_n \cdot \mathrm{d}\, x_n = (g_1, \ldots, g_n) : G \to \mathbb{R}^n$$

eine **Pfaffsche Form** (oder **unvollständiges Differenzial**). Die Pfaffsche Form ist ein **vollständiges Differenzial**, wenn es eine differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, n$$

Linearität der Ableitung

Satz 9.14

Sind $f, g : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar, so ist auch*

$$f + g : G \to \mathbb{R}^m$$

differenzierbar mit

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ *ist auch* $\lambda f : G \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar mit*

$$(\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x).$$

Produktregel: Skalare Multiplikation

Satz 9.15

Sind $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ *und* $g : G \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar, so ist auch* $fg : G \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar mit (für alle* $j = 1, \ldots n$*):*

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

d. h. für alle $x \in G$*:*

$$\frac{\partial(fg)}{\partial(x_j)}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}^m$$

Spezialfall: Produkt skalarwertiger Funktionen

Korollar 9.16

Sind $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ *und* $g : G \to \mathbb{R}$ *differenzierbar, so ist auch* $fg : G \to \mathbb{R}$ *differenzierbar mit:*

$$\operatorname{grad} fg = g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g \,,$$

d.h.

$$\operatorname{grad}_x fg = g(x) \cdot \operatorname{grad}_x f + f(x) \cdot \operatorname{grad}_x g \in \mathbb{R}^n$$

für alle $x \in G$.

Produktregel: Skalarprodukt

Satz 9.17

Sind $f, g : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar, so ist auch* $\langle f, g\rangle : G \to \mathbb{R}$ *differenzierbar mit*

$$\frac{\partial \langle f, g\rangle}{\partial x_j} = \langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, g\rangle + \langle f, \frac{\partial g}{\partial x_j}\rangle$$

d. h.

$$\frac{\partial \langle f, g\rangle}{\partial x_j}(x) = \langle \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), g(x)\rangle + \langle f(x), \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\rangle$$

für alle $x \in G$.

Produktregel: Kreuzprodukt

Satz 9.18

Sind $f, g : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^3$ *differenzierbar, so ist auch* $f \times g : G \to \mathbb{R}^3$ *differenzierbar mit*

$$\frac{\partial (f \times g)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

d. h.

$$\frac{\partial (f \times g)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \times g(x) + f(x) \times \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$$

für alle $x \in G$.

Kettenregel

Satz 9.19

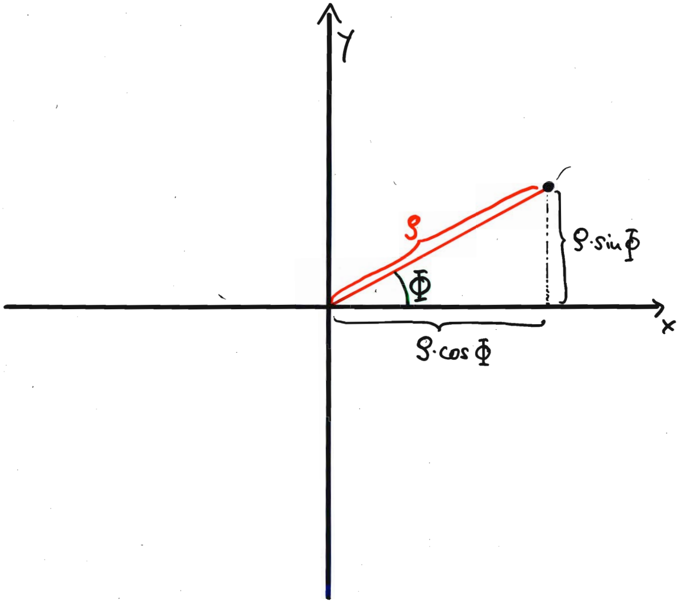
Sind $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto g(x)$ *und* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, $y \mapsto f(y)$ *differenzierbar, so ist auch* $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *differenzierbar mit*

$$(f \circ g)'(x) = \underbrace{f'(g(x))}_{\in \mathbb{R}^{p \times m}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \in \mathbb{R}^{p \times n},$$

d. h. mit $f = (f_1, \ldots, f_m)$ *und* $g = (g_1, \ldots, g_p)$*:*

$$\frac{\partial (f \circ g)_k}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial y_i}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)$$

Ebene Polarkoordinaten



Zusammenfassung Polarkoordinaten

- $x = \varrho \cos \phi$
- $y = \varrho \sin \phi$
- $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$
- ϱ: Abstand zum Ursprung
- Φ: Winkel mit positiver x-Achse

Ableitungen Polarkoordinaten

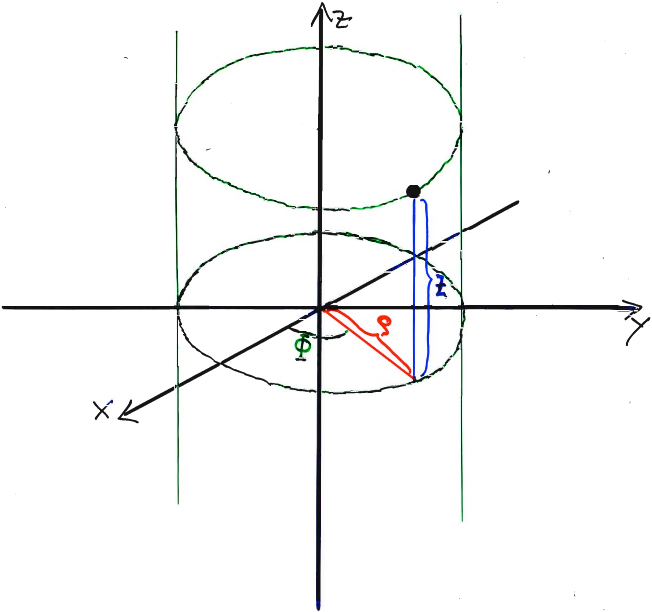
$$\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos\phi \qquad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -\varrho \sin\phi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varrho} = \sin\phi \qquad \frac{\partial y}{\partial \phi} = \varrho \cos\phi$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{x}{\varrho} \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{y}{\varrho}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-\sin\phi}{\varrho} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{\varrho}$$

Zylinderkoordinaten



Zusammenfassung Zylinderkoordinaten

- $x = \varrho \cos \phi$
- $y = \varrho \sin \phi$
- $z = z$
- $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$
- (ϱ, ϕ): Polarkoordinaten von (x, y)
- z: Höhe über x-y-Ebene

Ableitungen Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos\phi \quad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -\varrho\sin\phi \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varrho} = \sin\phi \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = \varrho\cos\phi \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

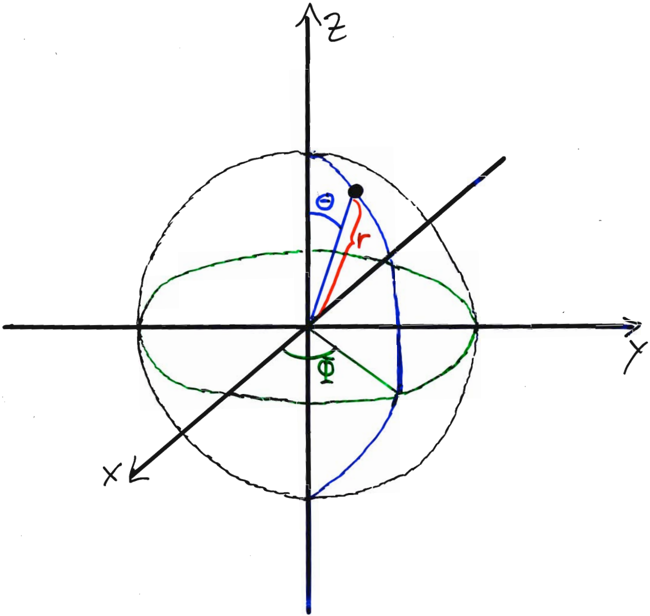
$$\frac{\partial z}{\partial \varrho} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{x}{\varrho} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{y}{\varrho} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-\sin\phi}{\varrho} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{\varrho} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Kugelkoordinaten



Zusammenfassung Kugelkoordinaten

- $x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi$
- $y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi$
- $z = r \cdot \cos\theta$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- r: Abstand zum Ursprung
- θ: Winkel mit positiver z-Achse
- ϕ: Winkel der Projektion in x-y-Ebene mit positiver x-Achse

Ableitungen Kugelkoordinaten

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi \quad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\phi \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\phi \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r\sin\theta\cos\phi$$

$$\frac{dz}{\partial r} = \cos\theta \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta\sin\phi}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{-\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-\sin\phi}{r\sin\theta} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

Schrankensatz

Satz 9.20

Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ *differenzierbar mit*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \leq M_j$$

für alle $x \in G$ *und* $j = 1, \ldots, n$. *Für alle* $x, y \in G$ *gilt dann (falls die Verbindungsstrecke zwischen* x *und* y *in* G *liegt):*

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot |y_j - x_j|$$

Zweite Ableitung

Definition 9.21

Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit wiederum differenzierbaren partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j} : G \to \mathbb{R}$, so heißt f **zweimal (partiell) differenzierbar**. Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i}$$

heißen die **zweiten partiellen Ableitungen** von f.
Schreibweise: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}$

Ergänzung zu Definition 9.21

Die Matrix

$$f''(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

heißt die **Hesse-Matrix** von f (im Punkt $x \in G$). Sind die Funktionen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : G \to \mathbb{R}$ alle stetig, so ist f **zweimal stetig differenzierbar**.

Satz von Schwarz

Satz 9.22

Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar, so ist*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{für alle} \quad i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

die Hesse-Matrix $f''(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *ist also symmetrisch, d. h.* $f''(x) = (f''(x))^T$.

Taylor-Formel

Satz 9.23

Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar. Falls die Verbindungsstrecke zwischen* x *und* $x + \Delta x$ *ganz in* G *liegt, gilt:*

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot \Delta x_j$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_j + \mathit{Fehler}(\Delta x)$$

mit $\lim\limits_{\Delta x \to \mathbb{O}_n} \frac{\mathit{Fehler}\,(\Delta x)}{\|\Delta x\|^2} = 0.$

Hesse-Form

Definition 9.24

Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so heißt die quadratische Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{hess}_x f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ u &\to \operatorname{hess}_x f(u) = \frac{1}{2} \cdot u^T f''(x) u \end{aligned}$$

($u \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenvektor aufgefasst) die **Hesse-Form** von f im Punkt u.

Lokale Extrema

Definition 9.25

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ nimmt in $x^\star \in G$ ein **(striktes) lokales Minimum bzw. Maximum** an, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$f(x) \geq (>) f(x^\star) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq (<) f(x^\star)$$

für alle $x \in G$ mit $\|x - x^\star\| < \varepsilon$.

Notwendiges Kriterium für lokale Extrema

Satz 9.26

Nimmt eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ (auf einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$) in $x^\star \in G$ ein lokales Extremum an, so gilt

$$\operatorname{grad}_{x^\star} f = \mathbb{O}_n.$$

Hinreichendes Kriterium

Satz 9.27

Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar und* $x^\star \in G$ *mit* $\operatorname{grad}_{x^\star} f = \mathbb{O}_n$.

(i) *Ist* $\operatorname{hess}_{x^\star} f(u) > 0$ *für alle* $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ *(**positiv definit**), so nimmt* f *in* $x^\star$ *ein striktes lokales Minimum an.*

(ii) *Ist* $\operatorname{hess}_{x^\star} f(u) < 0$ *für alle* $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ *(**negativ definit**), so nimmt* f *in* $x^\star$ *ein striktes lokales Maximum an.*

(iii) *Gibt es* $u, u' \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\operatorname{hess}_{x^\star} f(u) > 0$ *und* $\operatorname{hess}_{x^\star} f(u') < 0$ *(**indefinit**), so nimmt* f *in* $x^\star$ *kein lokales Extremum an.*

Ergänzung zu Satz 9.27

(iv) Ist $\text{hess}_{x^\star} f(u) \geq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (**positiv semidefinit**) oder $\text{hess}_{x^\star} f(u) \leq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (**negativ semidefinit**), so gibt das Kriterium keine Auskunft.

Hinreichendes Kriterium für $n = 2$

Satz 9.28

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar und* $x^\star \in G$ *mit*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^\star) = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^\star) = 0\,.$$

Sei

$$D(x^\star) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^\star) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^\star) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^\star)\right)^2$$

(die Determinante der Hesse-Matrix $f''(x^\star) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$*).*

Fortsetzung von Satz 9.28

Dann gelten:

(i) Falls $D(x^\star) > 0$ ist:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0 \Rightarrow$ striktes lokales Minimum in $x^\star$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0 \Rightarrow$ striktes lokales Maximum in $x^\star$

(ii) Falls $D(x^\star) < 0$ ist, hat f in $x^\star$ kein lokales Extremum.

(iii) Falls $D(x^\star) = 0$ ist, gibt das Kriterium keine Auskunft.