Vorlesung
Mathematik für Ingenieure
(WS 11/12, SS 12, WS 12/13)

Kapitel 4: Matrizen

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 10. November 2011)

Matrizen

Definition 4.1

Eine $m \times n$-**Matrix** ist ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

mit m Zeilen und n Spalten. Die Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ ist $\mathbb{K}^{m \times n}$ (hier immer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Bemerkungen

- $a_{i,j}$ ist also der Eintrag in Zeile i und Spalte j.
- Schreibweisen: $A = (a_{i,j}) = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$
- Menge $\mathbb{R}^{m\times n}$ der **reellen Matrizen**:
  $a_{i,j} \in \mathbb{R} \quad$ für alle i, j
- Menge $\mathbb{C}^{m\times n}$ der **komplexen Matrizen**:
  $a_{i,j} \in \mathbb{C} \quad$ für alle i, j
- Hier: Beschränkung auf reelle Matrizen (komplexe Matrizen analog)

Beispiele

- $$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$
  Z.B.: $a_{1,1} = 1$, $a_{2,3} = 4$
- Die Matrix
  $$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (c_{i,j})$$
  (mit $c_{i,j} = 1$ für $i = j$ und $c_{i,j} = 0$ für $i \neq j$) heißt die $n \times n$-**Einheitsmatrix.**

Beispiele

- Die Matrix $\mathbb{O} = \mathbb{O}_{m,n} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit lauter Nullen ist die $m \times n$-**Nullmatrix**.
- $B = (b_{1,1}) \in \mathbb{K}^{1 \times 1}$ ist eine 1×1-Matrix; wir können $\mathbb{K}^{1 \times 1}$ mit $\mathbb{K}$ identifizieren.
- Vektoren aus $\mathbb{K}^k$ kann man als einspaltige $k \times 1$-Matrizen oder als einzeilige $1 \times k$-Matrizen auffassen.
- Konvention: Im Kontext der Matrizenrechnung identifizieren wir $\mathbb{K}^k$ mit $\mathbb{K}^{k \times 1}$ (**Spaltenvektoren**)

Transponierte

Definition 4.2

Die **Transponierte** einer Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die Matrix $A^T = (b_{k,l}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ mit $b_{k,l} = a_{l,k}$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, $l \in \{1, \ldots, m\}$ (Vertauschung der Rollen von Zeilen und Spalten).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

Addition und skalare Multiplikation

Definition 4.3

Für $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$A + B := (a_{i,j} + b_{i,j}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

(**Matrizenaddition**) und

$$\lambda A := (\lambda a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

(**skalare Multiplikation**).

Beispiele

- $$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

- $$(-2)\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

Für $A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gelten:

- $(A+B)+C = A+(B+C)$
- $A+B = B+A$
- $A+\mathbb{O} = A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

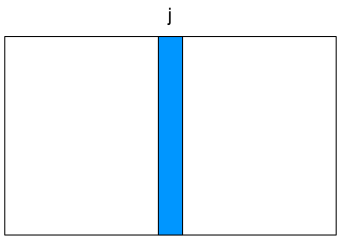
Wie $\mathbb{K}^k$ bildet auch $\mathbb{K}^{m\times n}$ einen *Vektorraum*.

Zeilen und Spalten

Für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

- $A_{i,\star} \in \mathbb{K}^n$ ist der aus der i-ten Zeile von A gebildete Vektor (der Länge n).

- $A_{\star,j} \in \mathbb{K}^m$ ist der aus der j-ten Spalte von A gebildete Vektor (der Länge m).



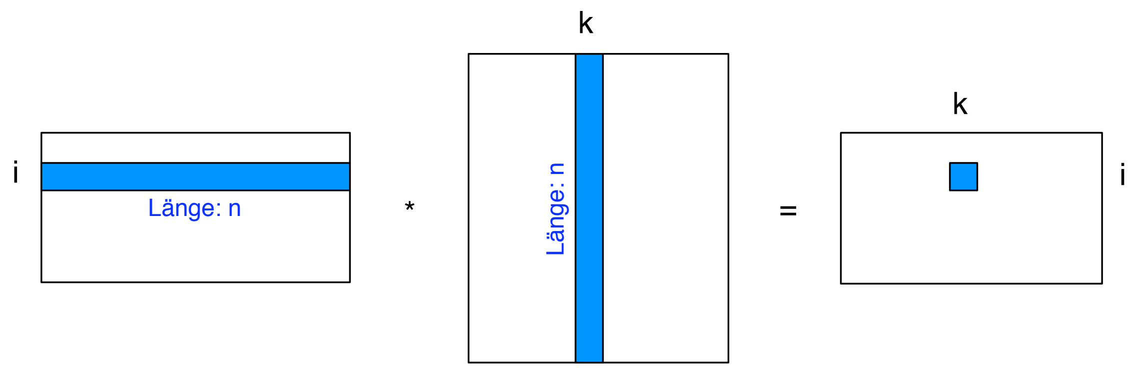
Matrizenmultiplikation

Definition 4.4

Für zwei Matrizen $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $B = (b_{j,k}) \in \mathbb{K}^{n\times p}$ definiere $AB = (c_{ik}) \in \mathbb{K}^{m\times p}$ mit

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} = \langle A_{i,\star}, B_{\star,k}\rangle$$

für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \{1, \ldots, p\}$.



Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 1 & 3\cdot(-1) + 2\cdot 2 \\ 0\cdot 2 + 5\cdot 1 & 0\cdot(-1) + 5\cdot 2 \\ (-1)\cdot 2 + 0\cdot 1 & (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 10 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Formate müssen passen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

kann man nicht multiplizieren (A hat 2 Spalten, aber B hat 3 Zeilen).

Weitere Beispiele

- $$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Weitere Beispiele

- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.5

Matrizenmultiplikation ist i.A. **nicht kommutativ***!*

Rechenregeln

Für Matrizen A, B, C jeweils passender Formate und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten:

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $A\mathbb{I}_n = A = \mathbb{I}_m A$
- $\mathbb{O}_{m,m} A = \mathbb{O}_{m,n} = A\mathbb{O}_{n,n}$

Multiplikation von Matrizen mit Vektoren

- Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$.
- Fasse $x \in \mathbb{K}^n$ mit Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ als $n \times 1$-Matrix auf (Spaltenvektor).
- Definiere $Ax \in \mathbb{K}^m$ als den Vektor mit m Komponenten, der als $m \times 1$-Matrix aufgefasst

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A_{1,\star}, x \rangle \\ \vdots \\ \langle A_{m,\star}, x \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

ist.

Lineare Abbildungen

Bemerkung 4.6

Die mittels einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *definierte Abbildung* $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \quad , \quad x \mapsto Ax$ *ist eine lineare Abbildung.*

Bemerkung 4.7

Wir werden später sehen: Zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *gibt es auch eine Matrix* $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *mit*

$$f(x) = Ax \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{K}^n\,.$$

Beispiel

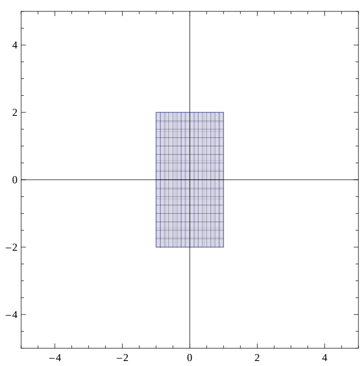
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

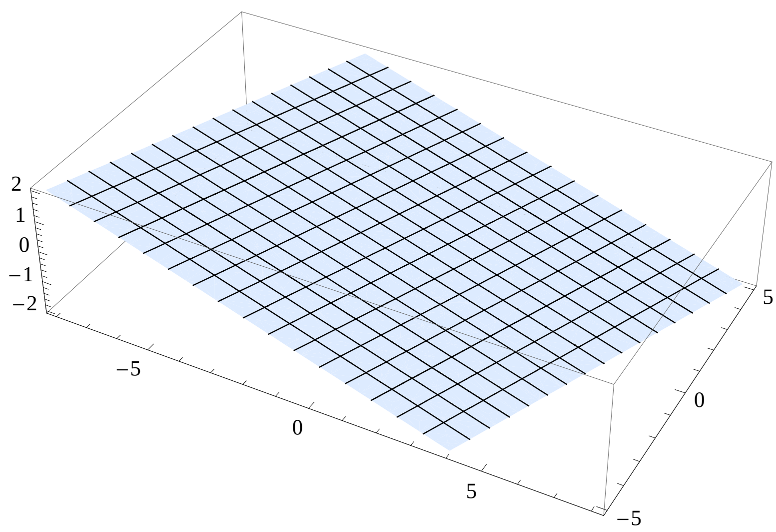
$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & + & 3x_2 \\ 5x_1 & + & 0x_2 \\ 0x_1 & + & (-1)x_2 \end{pmatrix}$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, also

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, 5x_1, -x_2)\,.$$

Bildmenge





(Bild $f(R)$ des Rechtecks $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ unter f.)

Koordinatenprojektion

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(Projektion auf die ersten beiden Koordinaten.)

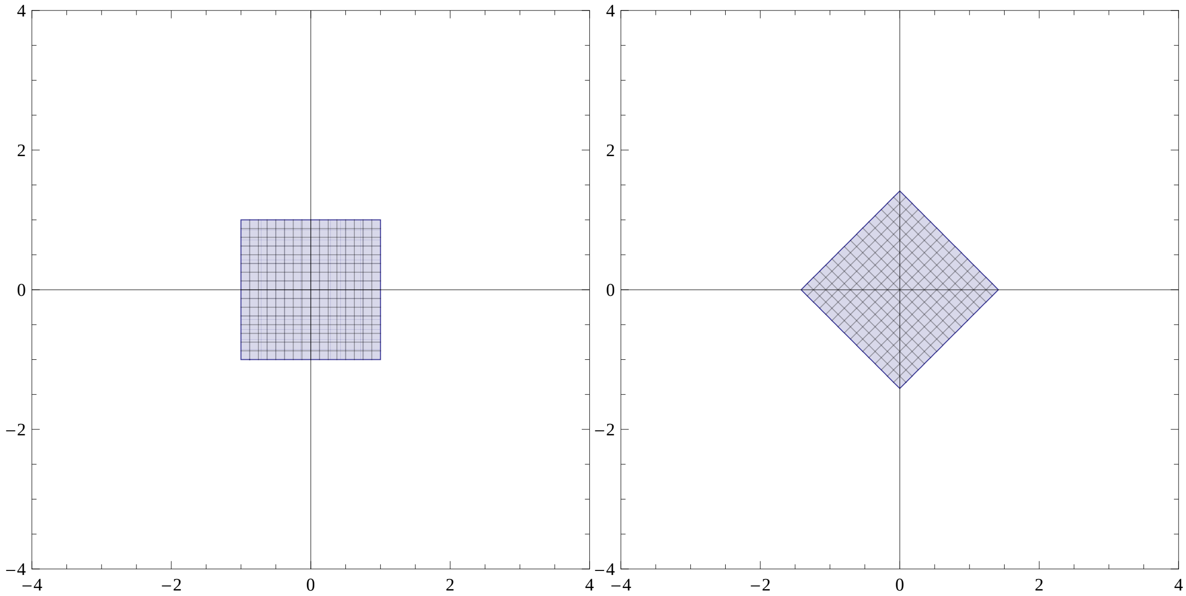
Drehungen

Für einen Winkel $\Phi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi) & -\sin(\Phi) \\ \sin(\Phi) & \cos(\Phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

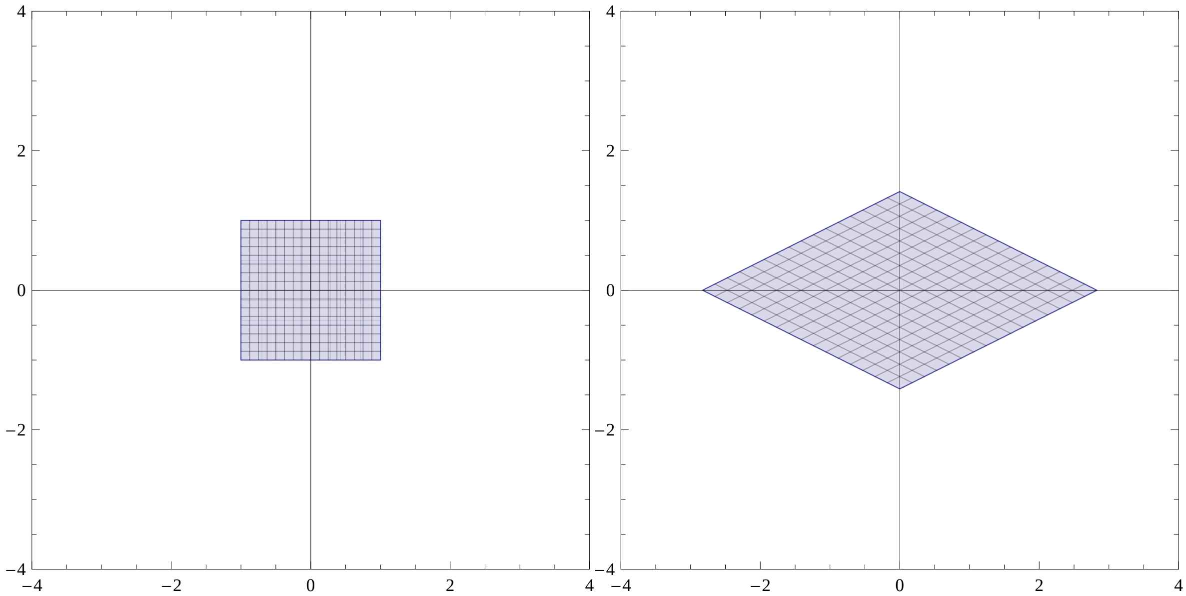
entsteht durch Drehung (gegen Uhrzeigersinn) um den Winkel Φ um den Ursprung.

Beispiel mit $\Phi = \frac{\pi}{4}$



Mit anschließender x-Streckung

$$\begin{pmatrix} 2\cos(\Phi) & -2\sin(\Phi) \\ \sin(\Phi) & \cos(\Phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

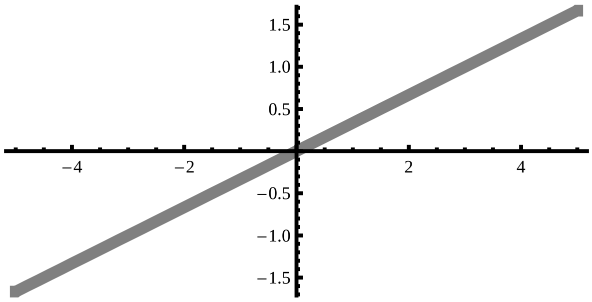


$m = 1$ und $n = 1$

Lineare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (a) \cdot (x) = ax$$

für eine Konstante $a \in \mathbb{R}$.



Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x$

Die Graphen von linearen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Geraden durch den Ursprung.

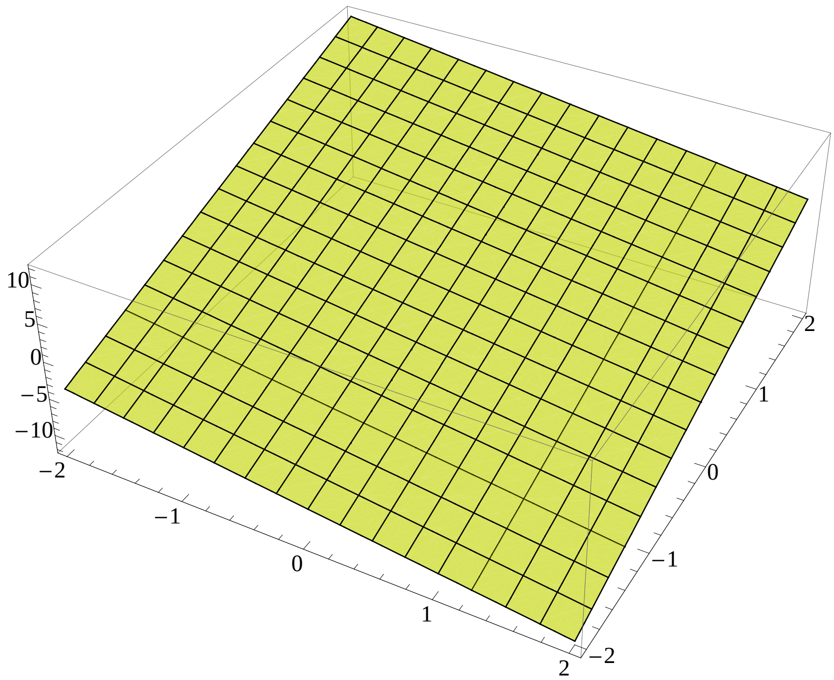
$m = 1$ und n beliebig

Lineare Funktionen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, \ldots, x_n) \\ &= (a_1, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \\ &= \langle a, x \rangle \end{aligned}$$

für einen konstanten Vektor $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Graphen



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = -2x + 4y$

Die Graphen von linearen Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind (Hyper-)Ebenen im $\mathbb{R}^{n+1}$ durch den Ursprung.

Kerne von Matrizen

Definition 4.8

Der **Kern** einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \mathbb{O}_m\} = \ker(\varphi_A)$$

(also der Kern der linearen Abbildung $x \mapsto A$).

Zeilen- vs. Spaltenvektoren

Im Kontext von Matrizenmultiplikationen sind Vektoren $v \in \mathbb{K}^q$ immer als Spaltenvektoren

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{q \times 1}$$

aufzufassen. Der zugehörige Zeilenvektor ist

$$v^T = (v_1, \ldots, v_q) \in \mathbb{K}^{1 \times q}.$$

Lineare Gleichungssysteme

Definition 4.9

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ hat die Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit (konstanten) **Koeffizienten** $a_{ij} \in \mathbb{K}$ und (konstanten) **rechten Seiten** $b_i \in \mathbb{K}$ (für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$). Es heißt **homogen**, wenn $b_1 = \cdots = b_m = 0$ ist, sonst heißt es **inhomogen**.

Äquivalenz von LGS

- Die **Lösungsmenge** von $Ax = b$ ist
$$\{z \in \mathbb{K}^n \mid Az = b\}.$$

- Zwei lineare Gleichungssysteme
$$Ax = b \quad \text{und} \quad \tilde{A}x = \tilde{b}$$
(mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, b \in \mathbb{K}^m, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{\tilde{m}\times n}, \tilde{b} \in \mathbb{K}^{\tilde{m}}$) heißen **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben.

Zeilenoperationen

- Die folgenden **elementaren Zeilenoperationen** überführen ein LGS $Ax = b$ in ein äquivalentes LGS $\tilde{A}x = \tilde{b}$:
  (a) Vertauschung von Zeilen
  (b) Addition des λ-fachen einer Zeile $A_{i,\star}$ zu einer anderen Zeile $A_{k,\star}$ (mit $k \neq i$) für ein $\lambda \in \mathbb{K}$
- Das gleiche gilt für die Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ (**Skalierung**).
- Strategie: Bringe $Ax = b$ durch elementare Zeilenoperationen (und evtl. Skalierung) in eine Form, an der man die Lösungen leicht ablesen kann.

Köpfe

Definition 4.10

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ eine Matrix und $i \in \{1, \ldots, m\}$. Falls $A_{i,\star} \neq \mathbb{O}_n$, so heißt (i, j) mit

$$a_{i,1} = \cdots = a_{i,j-1} = 0 \quad \text{und} \quad a_{ij} \neq 0$$

der **Kopf** der i-ten Zeile von A; die Zahl $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ist dann die **Kopfzahl** der i-ten Zeile. Ist $A_{i,\star} = \mathbb{O}_n$, so hat die i-te Zeile keinen Kopf.

Zeilenstufenform

Definition 4.11

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat **Zeilenstufenform** (ZSF) wenn für ein $p \in \{1, \ldots, m\}$ $A_{1,\star}, \ldots, A_{p,\star} \neq \mathbb{O}_n$ und $A_{p+1,\star} = \cdots = A_{m,\star} = \mathbb{O}_n$ gilt und für alle $i, k \in \{1, \ldots, p\}$ mit $i < k$ der Kopf der k-ten Zeile weiter rechts als der Kopf der i-ten Zeile steht (insbesondere stehen unter jedem Kopf nur Nullen).Die Spalten, die Köpfe enthalten, heißen **Basis-Spalten**.
Sind zusätzlich alle Kopfzahlen gleich 1 und stehen auch über allen Köpfen nur Nullen, so hat die Matrix A **normierte Zeilenstufenform** (NZSF).

Zeilenstufenform

($\#$: Zahl $\neq 0$, $\star$: beliebige Zahl)

$$
\begin{matrix}
0 & \cdots & 0 & \# & \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \# & \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star \\
0 & & & & & \cdots & & & & & 0 & \# & \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & & & & & & \cdots & & & & & & & 0 & \# & \star & \cdots & \star \\
0 & & & & & & & & & \cdots & & & & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & & & & & & & & \cdots & & & & & & & & & 0
\end{matrix}
$$

Normierte Zeilenstufenform

$$
\begin{matrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & \star & \cdots & \star & 0 & \star & \cdots & \star & 0 & \star & \cdots & \star & 0 & \star & \cdots & \star \\
0 & & & \cdots & & & 0 & 1 & \star & \cdots & \star & 0 & \star & \cdots & \star & 0 & \star & \cdots & \star \\
0 & & & & & \cdots & & & & & 0 & 1 & \star & \cdots & \star & 0 & \star & \cdots & \star \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & & & & & & \cdots & & & & & & & 0 & 1 & \star & \cdots & \star \\
0 & & & & & & & & & \cdots & & & & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & & & & & & & & \cdots & & & & & & & & & 0
\end{matrix}
$$

Gauß-Algorithmus für ZSF

Eingabe: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Ausgabe: $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in ZSF,
die durch elementare Zeilenoperationen aus A entstanden ist

(1) Falls $A = \mathbb{O} : \tilde{A} \leftarrow A$ (fertig)

(2) Sonst suche eine Zeile, deren Kopf am weitesten links steht und vertausche diese Zeile mit der ersten Zeile.

Gauß-Algorithmus für ZSF

(3) Ist $(1, j)$ der Kopf der ersten Zeile, so addiere für alle $i \in \{2, \ldots, m\}$ das

$$\left(-\frac{a_{ij}}{a_{1j}}\right)\text{-fache der ersten zur } i\text{-ten Zeile}$$

(unter $(1, j)$ stehen in der j-ten Spalte jetzt nur noch Nullen).

(4) Sei $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(n-j)}$ die entstandene Matrix ohne die erste Zeile und die ersten j Spalten; wende das Verfahren rekursiv auf $\tilde{A}$ an.

ZSF-Transformation

Bemerkung 4.12

- *Mit dem Gauß-Algorithmus kann man jede Matrix A in eine Matrix $\tilde{A}$ in ZSF transformieren.*
- *Diese ZSF-Matrix $\tilde{A}$ ist aber durch A i. A. nicht eindeutig bestimmt (wegen der Wahlmöglichkeiten in Schritt 2).*
- *Die Anzahl der Rechenoperationen ist dabei beschränkt durch*
$$const \cdot mn \cdot \min\{m, n\}.$$

Gauß-Algorithmus für NZSF

Eingabe: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ in ZSF

Ausgabe: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ in NZSF,
die durch elementare Zeilenoperationen und Skalierung aus $\tilde{A}$ entstanden ist.

(1) Dividiere jede Nicht-Null-Zeile durch ihre Kopfzahl.

(2) Für $i = m, m-1, \ldots, 1$ (falls $\tilde{A}_{i,\star} \neq \mathbb{O}_n$): Subtrahiere geeignetes Vielfaches der i-ten Zeile von den Zeilen $1, \ldots, i-1$, so dass über dem Kopf der i-ten Zeile nur noch Nullen stehen.

NZSF-Transformation

Bemerkung 4.13

- *Mit dem Gauß-Algorithmus kann man jede Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, die in ZSF ist, in eine Matrix in NZSF transformieren.*
- *Die Anzahl der Rechenoperationen ist dabei beschränkt durch*
$$\mathit{const} \cdot mn \cdot \min\{m, n\}.$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Definition 4.14

Für ein LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$ heißt

$$(A, b) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$$

die **erweiterte Koeffizientenmatrix** von $Ax = b$.
Das LGS $Ax = b$ hat NZSF, wenn (A, b) NZSF hat.

Lösungsstruktur bei NZSF

Satz 4.15

Sei $Ax = b$ ein LGS in NZSF; sei r die Anzahl der Nicht-Null-Zeilen von A.

(1) *Falls $b_{r+1} \neq 0$ (oder $b_i \neq 0$ für $i \geq r+1$), so hat $Ax = b$ keine Lösung.*

(2) *Ansonsten (d. h. $b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$):*

   0.1 *Falls $r = n$ (jede Spalte ist Basisspalte): $Ax = b$ hat die eindeutige Lösung $x_1 = b_1$, . . . , $x_n = b_n$.*

   0.2 *Falls $r < n$: $Ax = b$ hat unendlich viele Lösungen, die man erhält, indem man den Nicht-Basis-Variablen beliebige Werte zuweist und die Werte der Basis-Variablen anschließend jeweils mit Hilfe der Zeile ausrechnet, deren Kopf in der zugehörigen Spalte steht.*

Lösungen von allgemeinen LGS

Bemerkung 4.16

- *Ein allgemeines LGS $Ax = b$ kann man also lösen, indem man es zunächst via Gauß-Algorithmus in NZSF bringt und dann Satz 4.15 anwendet.*
- *Hat man eine beliebige Lösung z mit $Az = b$, so erhält man alle anderen Lösungen von $Ax = b$, indem man zu z beliebige Lösungen des* **homogenen Systems** *$Ax = \mathbb{O}$ addiert.*

Der Rang

Definition 4.17

Der **Rang** $\mathrm{rang}(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist:

- Die Dimension des von den Zeilen bzw. Spalten erzeugten Unterraums von $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$.
- Die Anzahl der Nicht-Nullzeilen in einer NZSF von A.
- $n - \dim(\ker A)$.

Bemerkung 4.18

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *ist* $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^{\mathsf{T}})$.

Quadratische Matrizen

Definition 4.19

Eine Matrix heißt **quadratisch**, wenn sie genau so viele Zeilen wie Spalten hat.

Definition 4.20

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hat **obere** bzw. **untere Dreiecksform**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $j < i$ bzw. für alle $j > i$ gilt.

Definition 4.21

Die **Hauptdiagonale** einer $n \times n$ Matrix besteht aus den Positionen (i, i) (für $i \in \{1, \dots, n\}$).

Dreiecksmatrizen und LGS

Bemerkung 4.22

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *eine obere oder untere Dreiecksmatrix.*

1. *Ist* $a_{ii} \neq 0$ *für alle* i, *so sind für alle* $b, c \in \mathbb{K}^n$ *die Systeme*

$$Ax = b \quad \textit{und} \quad y^\mathsf{T} A = c^\mathsf{T}$$

   eindeutig lösbar.
2. *Ist* $a_{ii} = 0$ *für irgendein* i, *so ist* $Ax = \mathbb{e}_i$ *nicht lösbar.*

Invertierbarkeit

Definition 4.23

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **invertierbar** (oder **regulär**), falls eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ existiert mit $AB = \mathbb{I}_n$.Eine solche Matrix B ist eindeutig bestimmt (wenn sie existiert); sie wird mit A^{-1} (**Inverse** von A) bezeichnet.Eine nicht invertierbare quadratische Matrix heißt **singulär**.

Korollar 4.24

Eine Dreiecksmatrix ist genau dann invertierbar, wenn sie auf der Hauptdiagonalen keine Null hat.

Rechenregeln

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar. Dann gelten:

- $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_n$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Sind $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, so ist $A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_k$ invertierbar mit

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \cdots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}.$$

Invertierbarkeit und LGS

Bemerkung 4.25

Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, so hat für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ das LGS $Ax = b$ genau eine Lösung: $x = A^{-1}b$.

Satz 4.26

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn das LGS $Ax = \mathbb{O}_n$ nur die Lösung $x = \mathbb{O}_n$ hat.

Korollar 4.27

Elementare Zeilen- und Spaltenoperationen ändern die Invertierbarkeit einer Matrix nicht. (Achtung: Die Inverse ändert sich i.a. aber schon.)

Kriterien für Invertierbarkeit

Korollar 4.28

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *ist genau dann invertierbar, wenn ihre Spalten linear unabhängig sind.*

Korollar 4.29

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *ist genau dann invertierbar, wenn ihre Zeilen linear unabhängig sind.*

Invertierbarkeit und lineare Abbildungen

Satz 4.30

Eine durch $\varphi(x) = Ax$ *(mit* $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$*) definierte lineare Abbildung* $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *ist genau dann umkehrbar, wenn* A *invertierbar ist. Die Umkehrabbildung ist dann definiert durch* $\varphi^{-1}(y) = A^{-1}y$ *für alle* $y \in \mathbb{K}^n$.

Elementarmatrizen

Definition 4.31

Eine **Elementarmatrix** ist eine Matrix, die aus einer Identitätsmatrix durch eine elementare Zeilenoperation oder eine Zeilenskalierung (mit $\lambda \neq 0$) hervorgeht.

Invertierung von Elementarmatrizen

Bemerkung 4.32

- *Elementarmatrizen sind invertierbar. Ihre Inversen sind die Elementarmatrizen, die zu den jeweiligen "Umkehroperationen" (Vertauschen, Subtraktion des λ-fachen, Multiplikation mit Kehrwert) gehören.*
- *Entsteht $\tilde{A}$ aus $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ durch eine Folge von elementaren Zeilenoperationen und Zeilenskalierungen mit zugehörigen Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k \in \mathbb{K}^{m \times m}$, so ist $\tilde{A} = PA$ mit der invertierbaren Matrix*
$$P = E_k \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \in \mathbb{K}^{m \times m}.$$

Invertierung mittels Gauß-Algorithmus

- Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
- Forme $(A, \mathbb{I}_n) \in \mathbb{K}^{n\times 2n}$ mittels elementarer Zeilenoperationen und Zeilenskalierungen in $(\tilde{A}, B)$ um, so dass $\tilde{A}$ in NZSF ist.
- Ist $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ das Produkt der zugehörigen Elementarmatrizen (wie in Bem. 4.32), so ist

$$(\tilde{A}, B) = P \cdot (A, \mathbb{I}_n) = (PA, P),$$

  also $B = P$ und $\tilde{A} = PA = BA$.
- Falls $\tilde{A} = \mathbb{I}_n$ ist, so ist also $\mathbb{I}_n = BA$, folglich $A^{-1} = B$.
- Falls $\tilde{A} \neq \mathbb{I}_n$ ($\tilde{A}$ hat NZSF), so hat $\tilde{A}$ wenigstens eine Null auf der Hauptdiagonalen, also ist A nicht invertierbar.

Darstellungsmatrizen...

Definition 4.33

Seien V und W zwei endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit zwei geordneten Basen $B = (b^{(1)}, \ldots, b^{(n)})$ von V und $C = (c^{(1)}, \ldots, c^{(m)})$ von W. Die **Darstellungsmatrix** einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ bzgl. B und C

$${}_C M(\varphi)_B = \Big({}_C\varphi(b^{(1)}), \ldots, {}_C\varphi(b^{(n)}) \Big) \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

hat als Spalten die Koordinatenvektoren der Bilder $\varphi(b^{(1)}), \ldots, \varphi(b^{(n)})$ der Basis B bzgl. der Basis C.

... stellen lineare Abbildungen dar

Satz 4.34

Sind V und W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit zwei geordneten Basen B von V und C von W, so gilt für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ für alle $v \in V$:

$$_C\varphi(v) = {}_CM(\varphi)_B \cdot {}_Bv$$

Verkettung linearer Abbildungen

Satz 4.35

Sind V, W, U endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit geordneten Basen B, C bzw. D, so gilt

$$_DM(\psi \circ \varphi)_B = {}_DM(\psi)_C \cdot {}_CM(\varphi)_B$$

für alle linearen Abbildungen $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to U$.

Darstellungsmatrizen und Basiswechsel

Satz 4.36

Sind B und C zwei geordnete Basen des endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, so gilt für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to V$

$$_CM(\varphi)_C = S^{-1} \cdot {_BM(\varphi)_B} \cdot S$$

mit $S = {_BM(\mathrm{id}_V)_C}$ (die Matrix, deren Spalten die Koordinatenvektoren von C bzgl. B sind).

Wechsel von der Standardbasis

Bemerkung 4.37

Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und ist $C = (c^{(1)}, \dots, c^{(n)})$ eine geordnete Basis von $\mathbb{K}^n$, so gilt für $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $\varphi_A(v) = Av$:

$$_CM(\varphi_A)_C = S^{-1}AS,$$

wobei $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Matrix mit Spalten $c^{(1)}, \dots, c^{(n)}$ ist.

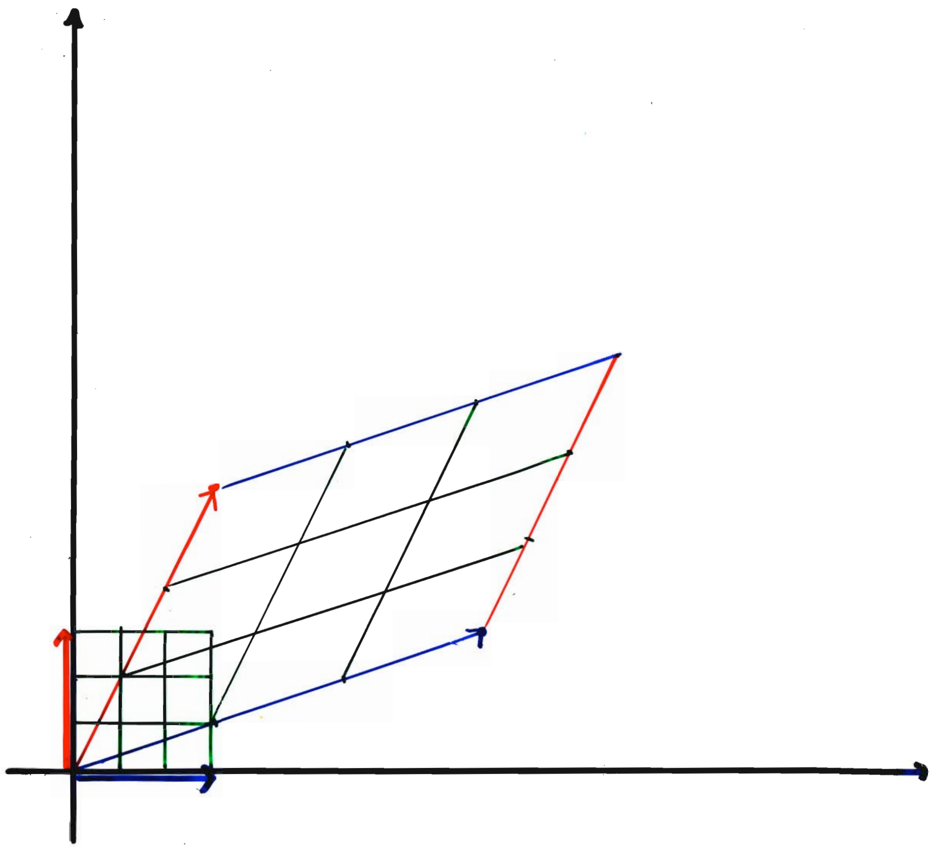
Ähnlichkeit von Matrizen

Definition 4.38

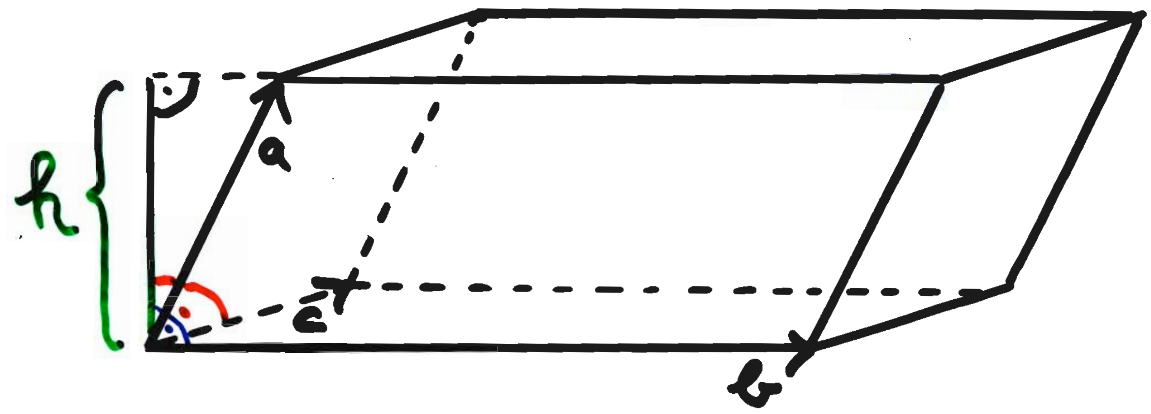
Zwei Matizen $A, A' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen **ähnlich** zueinander, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt mit

$$A' = S^{-1}AS\,.$$

Parallelogramm



Spate/Parallelepipede



Streichungsmatrizen

Definition 4.39

Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $A^{(i,j)} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A entsteht, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte heraus streicht.

Definition der Determinante

Definition 4.40

Für beliebige $n \geq 1$ definieren wir die **Determinante** $\det(A) \in \mathbb{K}$ einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ rekursiv:

- Falls $n = 1$: $A = (a_{11})$ und $\det(A) := a_{11}$
- Falls $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \det(A) &:= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det(A^{(i,1)}) \\ &= a_{11} \cdot \det(A^{(1,1)}) - a_{21} \cdot \det(A^{(2,1)}) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \cdot \det(A^{(n,1)}) \end{aligned}$$

Permutationen

Definition 4.41

Eine **Permutation** von $\{1, \ldots, n\}$ ist ein bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$. Eine Permutation σ repräsentiert also eine Reihenfolge

$$(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$$

der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Eine **Fehlstellung** von σ ist ein Paar $i < j$ mit $\sigma(i) > \sigma(j)$. Das **Signum** von σ ist

$$\operatorname{sign}(\sigma) := \begin{cases} +1 & , \quad \text{gerade viele Fehlstellungen} \\ -1 & , \quad \text{ungerade viele Fehlstellungen} \end{cases} .$$

Die Menge der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ ist Π_n.

Leibniz-Formel

Satz 4.42

Für die Determinante von $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *gilt:*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Pi_n} sign\ (\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

Die Determinante der Transponierten

Satz 4.43

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *gilt:*

$$\det(A) = \sum_{\tau \in \Pi_n} sign\ (\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)} = \det(A^T)$$

Nullzeilen und Nullspalten

Bemerkung 4.44

Hat $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *eine Zeile oder eine Spalte mit lauter Nullen, so ist*

$$\det(A) = 0.$$

Multilinearität der Determinanten

Satz 4.45

Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *mit* $A_{k,\star} = a' + \lambda a''$ *(*$a', a'' \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$*), so ist* $\det(A)$ *gleich*

$$\det \begin{pmatrix} A_{1,\star} \\ \vdots \\ a' + \lambda a'' \\ \vdots \\ A_{n,\star} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{1,\star} \\ \vdots \\ a' \\ \vdots \\ A_{n,\star} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} A_{1,\star} \\ \vdots \\ a'' \\ \vdots \\ A_{n,\star} \end{pmatrix}.$$

Analoges gilt für Spalten.

Die Determinante ist alternierend

Satz 4.46

Entsteht $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ aus $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ durch Vertauschung zweier Zeilen (oder zweier Spalten), so ist

$$\det(\tilde{A}) = -\det(A).$$

Korollar 4.47

Hat $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zwei gleiche Zeilen (oder zwei gleiche Spalten), so ist

$$\det(A) = 0.$$

Laplace-Entwicklung

Satz 4.48

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$, $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i\ell} \cdot \det(A^{(i,\ell)})$$

(Entwicklung nach der ℓ-ten Spalte)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \det(A^{(k,j)})$$

(Entwicklung nach der k-ten Zeile)

Zeilen-/Spaltenadditionen

Satz 4.49

Entsteht $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ aus $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ durch Addition des λ-fachen der i-ten Zeile zur k-ten Zeile mit $i \neq k$ (oder des μ-fachen der j-ten Spalte zur ℓ-ten Spalte mit $j \neq \ell$), so ist

$$\det(\tilde{A}) = \det(A).$$

Determinanten-Berechnung mit Gauß

- Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben.
- Bestimme mit elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen aus A eine Dreiecksmatrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
- Sei t die Anzahl der durchgeführten Zeilen- und Spaltenvertauschungen.
- Dann ist

$$\det(A) = (-1)^t \cdot \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii}\,.$$

Determinante und Kern

Satz 4.50

Für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *gilt:*

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \ker A \neq \{\mathbb{O}_n\}$$

Determinanten-Multiplikationssatz

Satz 4.51

Für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *gilt*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Vorsicht: Im Allgemeinen ist aber $\det(A + B)$ nicht gleich $\det(A) + \det(B)$!

Rechenregeln

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, falls A invertierbar
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$
- $\det(A^k) = (\det(A))^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$
- $\det(I_n) = 1$
- $\det(\mathbb{O}_{n \times n}) = 0$

Cramers Regel

Satz 4.52

Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar und $b \in \mathbb{K}^n$, so gilt für die eindeutige Lösung von $Ax = b$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det\left(A_{\star,1}, \ldots, A_{\star,j-1}, b, A_{\star,j+1}, \ldots, A_{\star,n}\right)$$

Diagonalisierbarkeit

Definition 4.53

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt, so dass $D = S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Eigenwerte und -vektoren

Definition 4.54

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein **Eigenwert** von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, wenn es (wenigstens) einen Vektor $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ gibt mit

$$Av = \lambda v\,.$$

Diese Vektoren heißen dann **Eigenvektoren** zum Eigenwert λ.

Kriterium für Diagonalisierbarkeit

Satz 4.55

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis von $\mathbb{K}^n$ aus lauter Eigenvektoren von A gibt. Schreibt man diese Basisvektoren als Spalten in eine Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so ist $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix, auf deren Diagonalen die zu den Basisvektoren gehörenden Eigenwerte stehen.

Eigenräume

Definition 4.56

Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}$$

der Eigenraum zum Eigenwert λ.

Das charakteristische Polynom

Definition 4.57

Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt

$$\chi_A = \det(A - x \cdot \mathbb{I}_n) \in \mathbb{K}[x]_n$$

das **charakteristische Polynom** von A.

Satz 4.58

Die Eigenwerte von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A \in \mathbb{K}[x]_n$ von A.

Konsequenzen

Bemerkung 4.59

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hat also höchstens n Eigenwerte (weil χ_A den Grad n hat).

Satz 4.60

Jede Matrix in $\mathbb{C}^{n \times n}$ hat wenigstens einen Eigenwert; wegen $\mathbb{R}^{n \times n} \subseteq \mathbb{C}^{n \times n}$ hat also jede reelle Matrix wenigstens einen Eigenwert in $\mathbb{C}$.

Nicht-reelle Eigenwerte reeller Matrizen

Bemerkung 4.61

Die nicht-reellen Eigenwerte reeller Matrizen treten als Paare zueinander komplex-konjugierter komplexer Zahlen auf.

Vielfachheiten von Nullstellen

- Jedes Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad n zerfällt in n Linearfaktoren:

  $$p(x) = \alpha \cdot (\lambda_1 - x)^{k_1} \cdot (\lambda_2 - x)^{k_2} \cdot \dots \cdot (\lambda_r - x)^{k_r}$$

  mit

  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{O}\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$
- $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind genau die Nullstellen von $p(x)$, ihre **Vielfachheiten** sind $k_1, \dots, k_r$.

Vielfachheiten von Eigenwerten

Definition 4.62

Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so ist die **algebraische Vielfachheit** von λ die Vielfachheit der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms χ_A von A; die **geometrische Vielfachheit** von λ ist $\dim\left(\mathrm{Eig}_A\left(\lambda\right)\right)$.

Algebraische und geometrische Vielfachheit

Satz 4.63

Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist höchstens so groß wie seine algebraische Vielfachheit; für jeden Eigenwert gilt also:

$$1 \leq \text{geom. Vielf.} \leq \text{alg. Vielf.}$$

Diagonalisierbarkeit und Eigenwerte

Satz 4.64

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist genau dann (über $\mathbb{K}$) diagonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom χ_A (über $\mathbb{K}$) in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit so groß wie die algebraische ist.

Determinante und Spur...

Satz 4.65

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit algebraischen Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_r$, so ist

- $\det(A) = \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot \lambda_r^{k_r}$
- $\mathrm{Spur}(A) = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \cdots + k_r\lambda_r$

($\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$)

... im charakteristischen Polynom

Bemerkung 4.66

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *ist*

$$\chi_A = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Spur}(A) x^{n-1} + \cdots + \det(A),$$

Spur und Determinante findet man also in den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms.

Komplex konjugierte Vektoren/Matrizen

Definition 4.67

Für $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ sei $\overline{v} = (\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}) \in \mathbb{C}^n$ der zu v **komplex konjugierte Vektor**; für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei $\overline{A} = (\overline{a_{ij}}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die zu A **komplex konjugierte Matrix**.

Symmetrische reelle Matrizen

Satz 4.68

Jede symmetrische reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *ist über* $\mathbb{R}$ *diagonalisierbar.*

Satz 4.69

Die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen reellen Matrix stehen orthogonal zueinander (d.h., je zwei Vektoren aus verschiedenen Eigenräumen haben Skalarprodukt Null).

Orthonormalbasen, orthogonale Matrizen

Definition 4.70

Eine **Orthonormalbasis** ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$, deren Vektoren paarweise orthogonal aufeinander stehen und Norm Eins haben.

Definition 4.71

Eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **orthogonal**, wenn $S^T S = \mathbb{I}$ (d. h. $S^{-1} = S^T$) gilt.

Bemerkung 4.72

Eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *ist genau dann orthogonal, wenn die Spalten von* S *eine Orthonormalbasis von* $\mathbb{R}^n$ *bilden.*

Reelle symmetrische Matrizen

Satz 4.73

Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $S^{\mathsf{T}} A S = D$ Diagonalgestalt hat. Die Eigenwerte von A stehen dabei mit ihren (algebraischen, geometrischen) Vielfachheiten auf der Diagonalen von D. Die Spalten von S bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A.

Hermitesche Matrizen

Definition 4.74

Eine Matix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt **hermitesch**, wenn $\overline{A}^{\mathsf{T}} = A$ ist.

Satz 4.75

Jede hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar und hat nur reelle Eigenwerte.