Vorlesung
Mathematik für Ingenieure
(WS 11/12, SS 12, WS 12/13)
Kapitel 8: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 30. Mai 2012)

Gewöhnliche DGL

Definition 8.1

Eine (explizite) **gewöhnliche Differenzialgleichung** n-ter Ordnung für eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ hat die Form

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle $t \in I$, wobei f eine Funktion (ein „Ausdruck“) in $n+1$ Veränderlichen ist.

Anfangswertproblem

Definition 8.2

Ein Anfangswertproblem n-ter Ordnung besteht aus einer DGL n-ter Ordnung

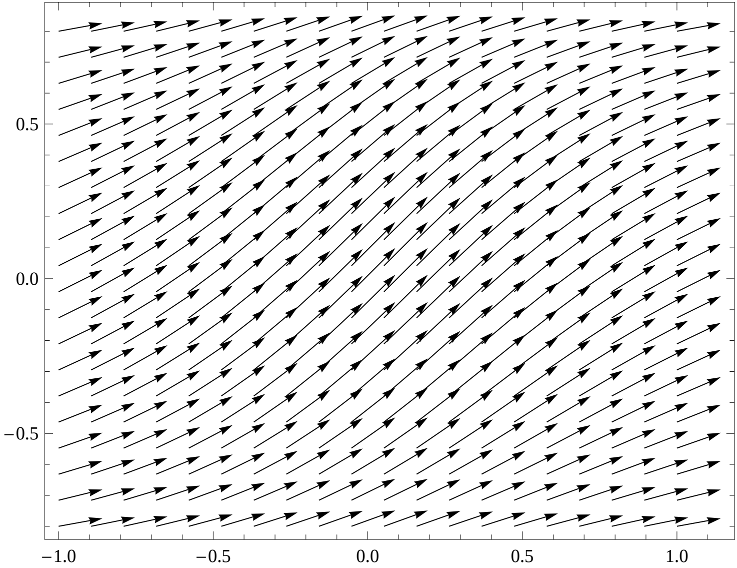
$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \qquad (2)$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und vorgegebenen Werten

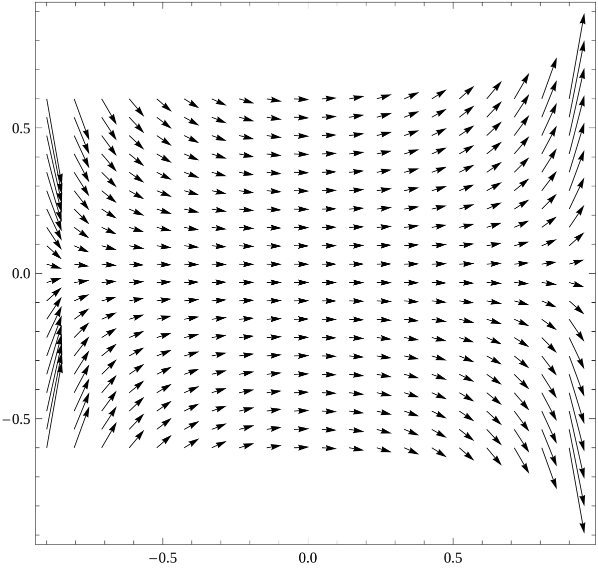
$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots \quad , \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \qquad (3)$$

an *einer* Stelle t_0 aus (dem Abschluss von) I.

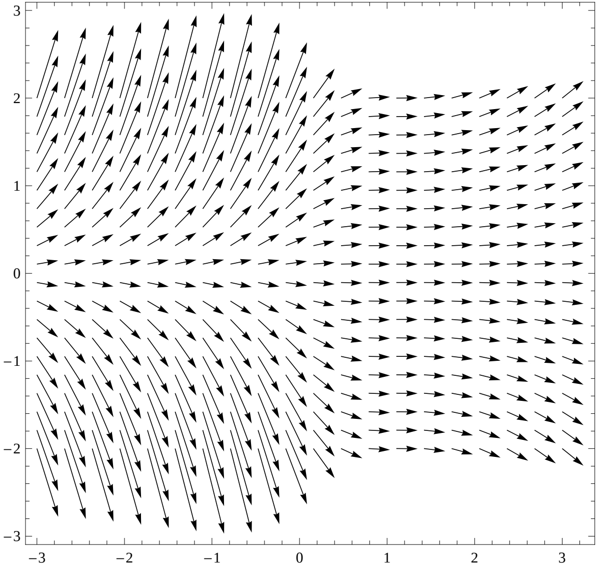
Richtungsfeld zu $y'(t) = \frac{1-y(t)^2}{1+t^2}$



Richtungsfeld zu $y'(t) = \frac{2ty(t)}{1-t^2}$



Richtungsfeld zu $y'(t) = \frac{(t-1)^2 y(t)}{1+t^2}$



Separable DGL

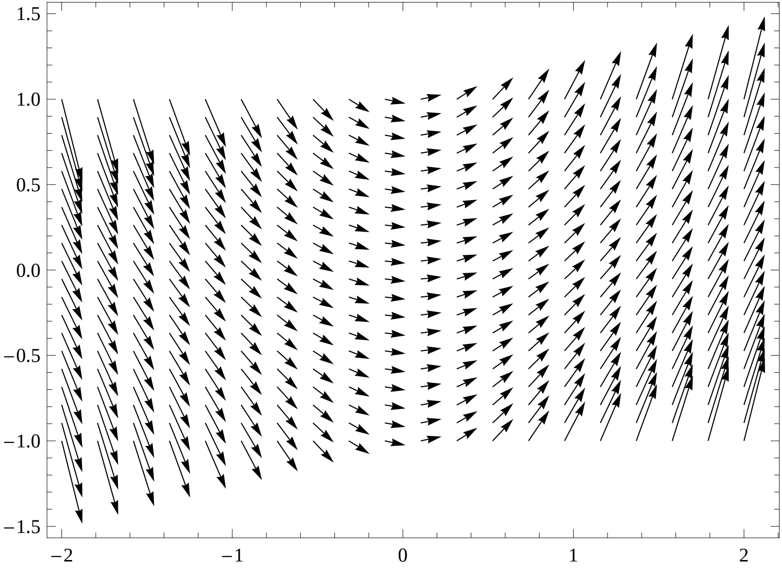
Definition 8.3

Eine Differenzialgleichung 1. Ordnung der Form

$$y'(t) = g(y(t)) \cdot h(t)$$

heißt **separabel** (**Trennung der Veränderlichen**).

$$y'(t) = t(1 + y(t)^2)$$



Lineare DGL 1. Ordnung

Definition 8.4

Eine **lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung** (in expliziter Form) hat die Gestalt

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \tag{4}$$

(mit vorgegebenen Funktionen $a(t)$ und $b(t)$).

Lineare DGL n. Ordnung

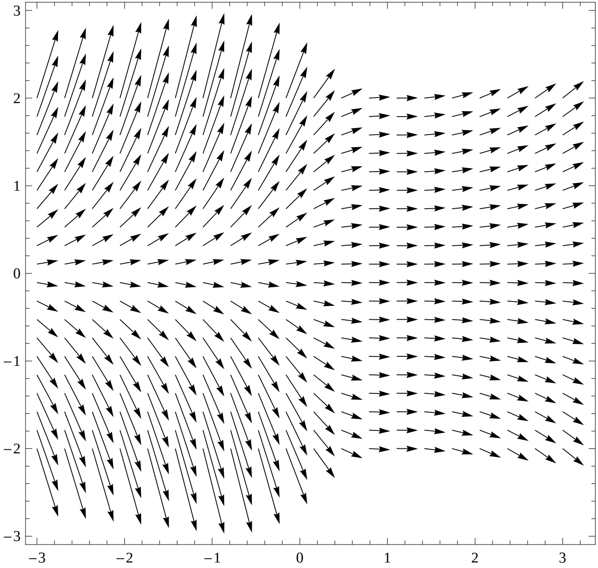
Definition 8.5

Eine **lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung** (in expliziter Form) hat die Gestalt

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) + b(t)$$

(mit vorgegebenen Funktionen $a_i(t)$, $b(t)$).

$$y'(t) = \frac{(t-1)^2 y(t)}{1+t^2}$$



Umschreiben zu 1. Ordnung

Bemerkung 8.6

Jede (explizite) DGL und jedes (explizite) DGL-System beliebiger Ordnung lässt sich umschreiben in ein DGL-System 1. Ordnung (höherer Dimension).

Dynamische Systeme

Definition 8.7

DGL-Systeme 1. Ordnung nennt man auch **dynamische Systeme**. Ihre Lösungen

$$x : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^m$$

heißen auch **Phasenkurven** oder **Phasenbahnen** im **Phasenraum** $\mathbb{R}^m$.

Autonome Systeme

Definition 8.8

Ein DGL-System (1. Ordnung) der Form

$$x'(t) = G(x(t))$$

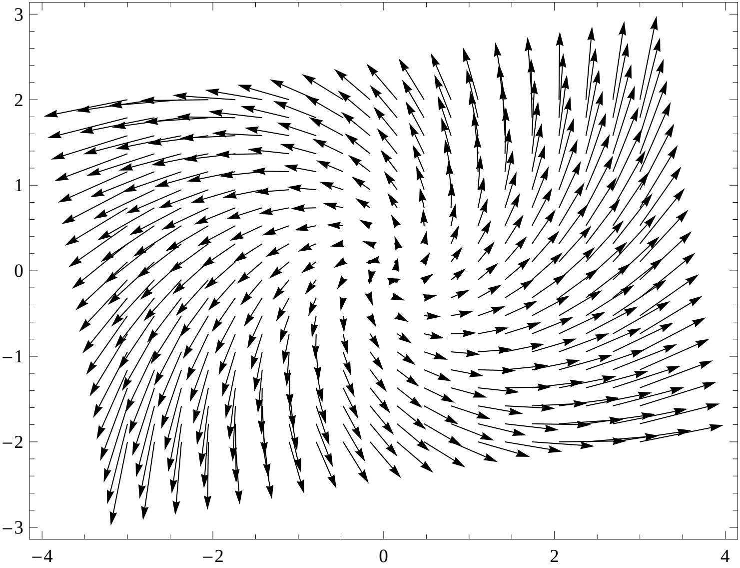
(in dem auf der rechten Seite t nicht explizit, sondern nur in $x(t)$ vorkommt) heißt ein **autonomes System**.

Umschreiben in autonome Systeme

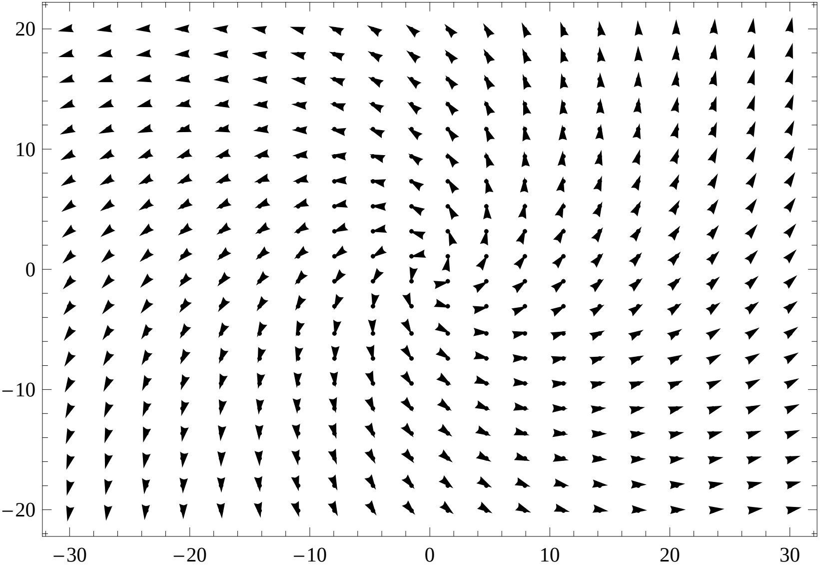
Bemerkung 8.9

Jedes dynamische System mit m *Gleichungen lässt sich zu einem autonomen System mit* $m+1$ *Gleichungen umschreiben.*

$x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t), x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t)$



$$x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t), x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



Satz von Picard-Lindelöf

Satz 8.10

Ist $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ *(*U *offen) stetig differenzierbar, so ist für jedes* $(t_0, x^{(0)}) \in U$ *das Anfangswertproblem*

$$x'(t) = G(t, x(t)), \quad x(t_0) = x^{(0)}$$

eindeutig lösbar.

Lineare DGL-Systeme

Satz 8.11

Haben $A(t)$ *und* $b(t)$ *auf dem Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *stetige Komponentenfunktionen* $a_{ij}(t)$ *bzw.* $b_i(t)$ *und ist* $t_0 \in I$, *so hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= \eta^{(0)} \end{aligned}$$

für jedes $\eta^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *genau eine auf ganz* I *definierte Lösung* $x : I \to \mathbb{R}^n$.

Lösungsräume linearer DGL-Systeme

Satz 8.12

Sei $x_P(t)$ *irgendeine Lösung (***partikuläre Lösung***) des Systems*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)\,. \tag{12}$$

Dann sind die Lösungen von (12) *genau die Funktionen*

$$y_P(t) + y_H(t)\,,$$

wobei $y_H(t)$ *die Lösungen des zu* (12) *gehörenden homogenen Systems* $x'(t) = A(t)x(t)$ *durchläuft.*

Der homogene Fall

Satz 8.13

Der Lösungsraum eines homogenen Systems

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{13}$$

mit stetig von t abhängigen Matrizen $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum.

Wronski-Matrix

Satz 8.14

Lösungen $x^{[1]}(t), \dots, x^{[n]}(t) : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^n$ *eines homogenen DGL-Systems* $x'(t) = A(t)x(t)$ *sind genau dann linear unabhängig (d. h. eine Lösungsbasis), wenn die* **Wronski-Matrix**

$$W(t) = \begin{bmatrix} x_1^{[1]}(t) & \dots & x_1^{[n]}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{[1]}(t) & \dots & x_n^{[n]}(t) \end{bmatrix}$$

für irgendein $t \in I$ $\operatorname{rang}(W(t)) = n$ *hat bzw. – dazu äquivalent – für die* **Wronski-Determinante** $\det(W(t)) \neq 0$ *gilt.*

Variation der Konstanten

Satz 8.15

Sei $x^{[1]}(t), \ldots, x^{[n]}(t)$ *eine Lösungsbasis des homogenen Systems* $x'(t) = A(t)x(t)$. *Für alle* $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ *sei* $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))$ *die Lösung des linearen Gleichungssystems* $W(t) \cdot c(t) = b(t)$ *(*$W(t)$*: Wronskimatrix der Lösungsbasis). Seien* $C_i(t)$ *Stammfunktionen von* $c_i(t)$. *Dann ist*

$$y_P = C_1(t) \cdot x^{[1]}(t) + \cdots + C_n(t) \cdot x^{[n]}(t)$$

(partikuläre) Lösung von $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$.

Lin. DGL Ord. n: Existenz/Eindeutigkeit

Satz 8.16

Sind $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ *und* $\beta(t)$ *auf dem Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *stetig, und ist* $t_0 \in I$*, so hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t) \\ &\qquad + \cdots + a_0(t)y(t) + \beta(t) \\ y(t_0) &= \eta_0, y'(t_0) = \eta_1, y^{(2)}(t_0) = \eta_2, \\ &\qquad \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1} \end{aligned}$$

für alle $\eta_0, \ldots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$ *genau eine auf ganz* I *definierte Lösung* $y : I \to \mathbb{R}$.

Lin. DGL Ord. n: Lösungsraum

Satz 8.17

*Sei $y_P(t)$ irgendeine Lösung (**partikuläre Lösung**) der DGL*

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) + \beta(t)\,.$$

Dann sind die Lösungen der DGL genau die Funktionen $y_P(t) + y_H(t)$, wobei $y_H(t)$ die Lösungen des zugehörigen homogenen Systems

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t)$$

durchläuft.

Lin. DGL Ord. n: Lösungsraum (homogen)

Satz 8.18

Der Lösungsraum einer homogenen DGL

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t)$$

mit stetigen Funktionen $a_0(t), a_1(t) \ldots, a_{n-1}(t)$ *ist ein* n*-dimensionaler Vektorraum.*

Lin. DGL Ord. n: Wronski-Test

Satz 8.19

Lösungen $y_1(t), \ldots, y_n(t) : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ *einer homogenen DGL* n*-ter Ordnung*

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t)$$

sind genau dann linear unabhängig (d. h. eine Lösungsbasis), wenn die **Wronski-Matrix** $W(t)$ *für irgendein* $t \in I$ *den Rang* $\operatorname{rang}(W(t)) = n$ *hat bzw. – dazu äquivalent – für die* **Wronski-Determinante** $\det(W(t)) \neq 0$ *gilt.*

Lin. DGL Ord. n: Wronski-Matrix

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Lin. DGL Ord. n: Variation der Konst.

Satz 8.20

Sei $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ eine Lösungsbasis einer homogenen DGL n-ter Ordnung. Für alle $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ sei $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $W(t) \cdot c(t) = b(t)$ ($W(t)$: Wronskimatrix, $b(t) = (0, \ldots, 0, \beta(t))$). Seien $C_i(t)$ Stammfunktionen von $c_i(t)$. Dann ist

$$y_P = C_1(t) \cdot y_1(t) + \cdots + C_n(t) \cdot y_n(t)$$

eine (partikuläre) Lösung der zugehörigen DGL $y^{(n)} = \cdots + \beta(t)$ mit Inhomogenität $\beta(t)$.