Vorlesung
Mathematik für Ingenieure
(WS 11/12, SS 12, WS 12/13)

Kapitel 2: Vektoren

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 19. Oktober 2011)

Vektoren in $\mathbb{R}^n$

Definition 2.1

Die Menge aller n-Tupel von reellen Zahlen (**Vektoren**) bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^n$.Schreibweisen:

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (**Zeilenvektor**)
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (**Spaltenvektor**)

Die i-te **Komponente** von $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist x_i.Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt $x = y$ genau dann, wenn $(x_1 = y_1 \text{ und } x_2 = y_2 \text{ und } \cdots \text{ und } x_n = y_n)$ ist.

Vektoraddition und skalare Multiplikation

Definition 2.2

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir:

- $x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ (**Vektoraddition**)
- $\lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ (**skalare Multiplikation**)

("Skalar" heißt "Zahl", im Gegensatz zu "Vektor".)

Nullvektor und Subtraktion

Definition 2.3

Der **Nullvektor** in $\mathbb{R}^n$ ist

$$\mathbb{O}_n := \mathbb{O} := (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}) \in \mathbb{R}^n$$

Definition 2.4

Für $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $-x := (-1)x$. Und für $x, y \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$x - y := x + (-y) .$$

Rechenregeln . . .

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Regeln:

- $x + y = y + x$
  (Kommutativität der Vektoraddition)
- $x + (y + z) = (x + y) + z$
  (Assoziativität der Vektoraddition)
- $x + \mathbb{O} = x$
  ($\mathbb{O}$ ist neutrales Element der Vektoraddition)
- $x + (-x) = \mathbb{O}$
  (inverses Element der Vektoraddition)

. . . Rechenregeln

- $1 \cdot x = x$
  (1 ist neutrales Element der skalaren Multipl.)
- $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
  (Assoziativität der skalaren Multiplikation)
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (Distributivität)
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (Distributivität)

Linearkombinationen

Definition 2.5

Für k Vektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ und k Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ heißt

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^{(i)} = \lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} + \cdots + \lambda_k v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$$

eine **Linearkombination** von $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$. Die **Koeffizienten** der Linearkombination sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Lineare (Un-)Abhängigkeit ...

Definition 2.6

Die Vektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear unabhängig**, falls man keinen der Vektoren als Linearkombination der übrigen Vektoren schreiben kann, andernfalls heißen sie **linear abhängig**.

. . . Lineare (Un-)Abhängigkeit

Bemerkung 2.7

Die Vektoren $v^{(1)}, \ldots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *sind genau dann linear abhängig, wenn es Skalare* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *gibt, die nicht alle Null sind, mit*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^{(i)} = \mathbb{O}.$$

Bemerkung 2.8

Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren in $\mathbb{R}^n$ *ist* n.

i-te Einheitsvektoren

Definition 2.9

Der i**-te Einheitsvektor** in $\mathbb{R}^n$ ist

$$\mathbb{e}_i := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}),$$

also der Vektor, der in der i-ten Komponente eine Eins und in allen anderen Komponenten Nullen hat.

Basen von $\mathbb{R}^n$

Definition 2.10

Eine **Basis** von $\mathbb{R}^n$ wird von n linear unabhängigen Vektoren gebildet. Die **Standardbasis** von $\mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$.

Bemerkung 2.11

Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, so ist*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{e}_i$$

eine Linearkombination von $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$*. Dies ist die einzige Möglichkeit,* x *als Linearkombination von* $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$ *zu schreiben.*

Koordinaten bzgl. Basis

Satz 2.12

Die Vektoren $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ *bilden genau dann eine Basis von* $\mathbb{R}^n$*, wenn jeder Vektor* $x \in \mathbb{R}^n$ *als Linearkombination*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v^{(i)}$$

der $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ *darstellbar ist.Für jedes* $x \in \mathbb{R}^n$ *gibt es dann genau eine Möglichkeit,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$ *zu wählen. Diese* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *heißen die* ***Koordinaten*** *von* x *bzgl. der Basis* $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$*.*

Das (Euklidische) Skalarprodukt

Definition 2.13

Für $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt der Skalar

$$x \cdot y := \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

das (Euklidische) **Skalarprodukt** oder auch **inneres Produkt** von x und y.

Rechenregeln

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten:

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{O}$

(Euklidische) Norm

Definition 2.14

Für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$|x| := \|x\| := \|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

der **Betrag** oder die (Euklidische) **Norm** von x.

Bemerkung 2.15

Für $x \in \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ist

$$\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$$

der übliche (Absolut-)Betrag der Zahl x.

Rechenregeln

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten:

- $\|x\| = \|-x\|$
- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{O}$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(Euklidischer) Abstand in $\mathbb{R}^n$

Definition 2.16

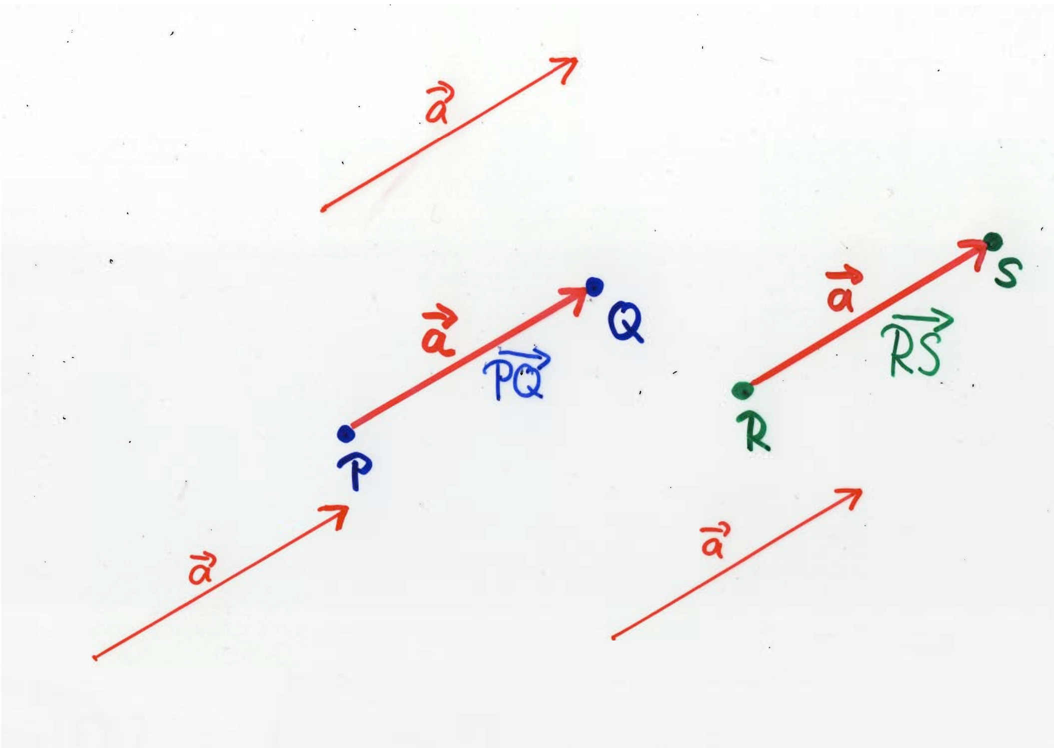
Der **(Euklidische) Abstand** von $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|x - y\| .$$

Pfeile und Raumvektoren

- Der Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ **repräsentiert** den **Raumvektor** $\vec{a}$, der nur bestimmt ist durch seine Richtung und seine **Länge** (**Betrag**) $|\vec{a}|$ (also den **Abstand** zwischen P und Q), aber nicht durch den speziellen Anfangspunkt P.
- $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ repräsentieren genau dann den gleichen Raumvektor, wenn $\overrightarrow{RS}$ eine Parallelverschiebung von $\overrightarrow{PQ}$ ist.
- Zu jedem Raumvektor $\vec{a}$ und Punkt P gibt es genau einen Pfeil $\overrightarrow{PQ}$, der $\vec{a}$ repräsentiert.
- $\overrightarrow{PP}$ repräsentiert den **Nullvektor** $\vec{0}$.

Beipiele



Skalare Multiplikation

Definition 2.17

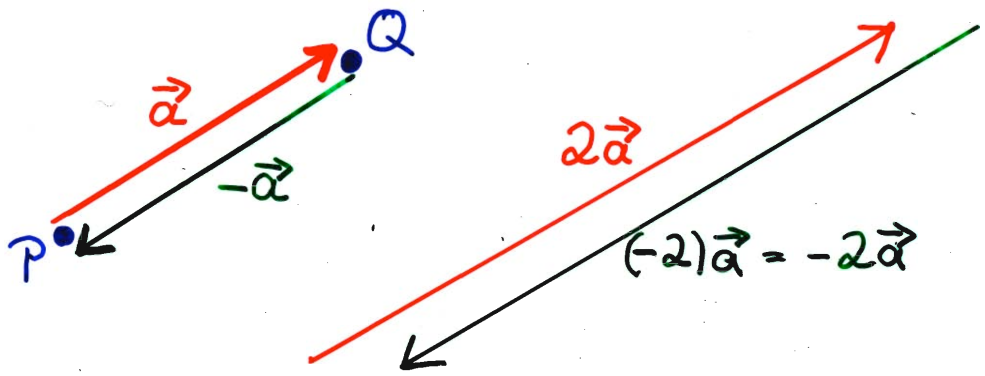
Für einen Raumvektor $\vec{a}$, repräsentiert durch einen Pfeil $\overrightarrow{PQ}$, ist $-\vec{a}$ der durch $\overrightarrow{QP}$ repräsentierte Raumvektor.

Definition 2.18

Für einen Raumvektor $\vec{a}$ und eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir den Raumvektor $\alpha\vec{a}$ wie folgt:

- Falls $\alpha \geq 0 : \alpha\vec{a}$ ist der Vektor, der die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ und Länge $\alpha|\vec{a}|$ hat. ($0\vec{a} = \vec{0}$)
- Falls $\alpha < 0 : \alpha\vec{a} := -|\alpha|\vec{a}$

Beispiel



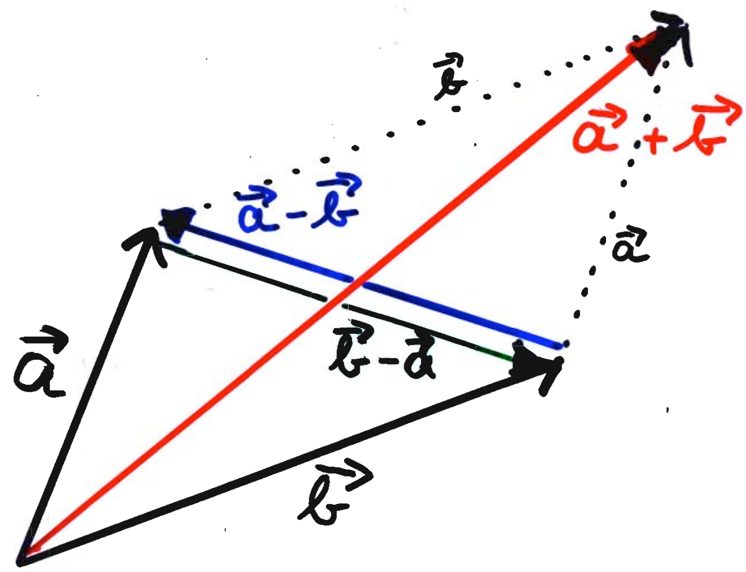
Addition von Raumvektoren

Definition 2.19

Ist $\vec{a}$ der von $\overrightarrow{PQ}$ repräsentierte Raumvektor und $\vec{b}$ der von $\overrightarrow{QR}$ repräsentierte Raumvektor, so ist $\vec{a}+\vec{b}$ der von $\overrightarrow{PR}$ repräsentierte Raumvektor. Außerdem definieren wir:

$$\vec{a}-\vec{b} := \vec{a}+(-\vec{b})$$

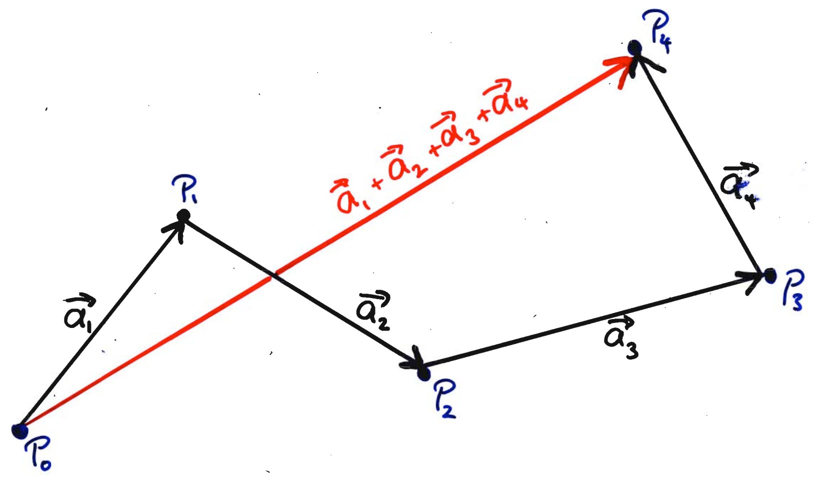
Beispiele



Rechenregeln

- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \ldots + \vec{a_k}$ ist der Vektor, der vom Pfeil $\overrightarrow{P_0 P_k}$ repräsentiert wird, wenn für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ der Vektor $\vec{a_i}$ von $\overrightarrow{P_{i-1} P_i}$ repräsentiert wird.

Beispiel



Kartesische Koordinatensysteme ...

Definition 2.20

Ein **kartesisches Koordinatensystem** des Raums besteht aus 3 Zahlengeraden (gleicher Längeneinheit) – der x-Achse, y-Achse und z-Achse –, welche sich alle rechtwinklig in einem Punkt O folgendermaßen schneiden:

- Es seien E_{xy}, E_{xz} und E_{yz} die Ebenen, die x-/y- bzw. x-/z- bzw. y-/z-Achse enthalten.
- Außerdem seien P_x, P_y und P_z die Punkte, in denen die 1 der x-, y- bzw. z-Achse liegt.
- Dann soll $\overrightarrow{OP_y}$ aus $\overrightarrow{OP_x}$ durch Drehung in E_{xy} um $\frac{\pi}{2}$ von P_z aus gesehen gegen den Uhrzeigersinn hervorgehen.

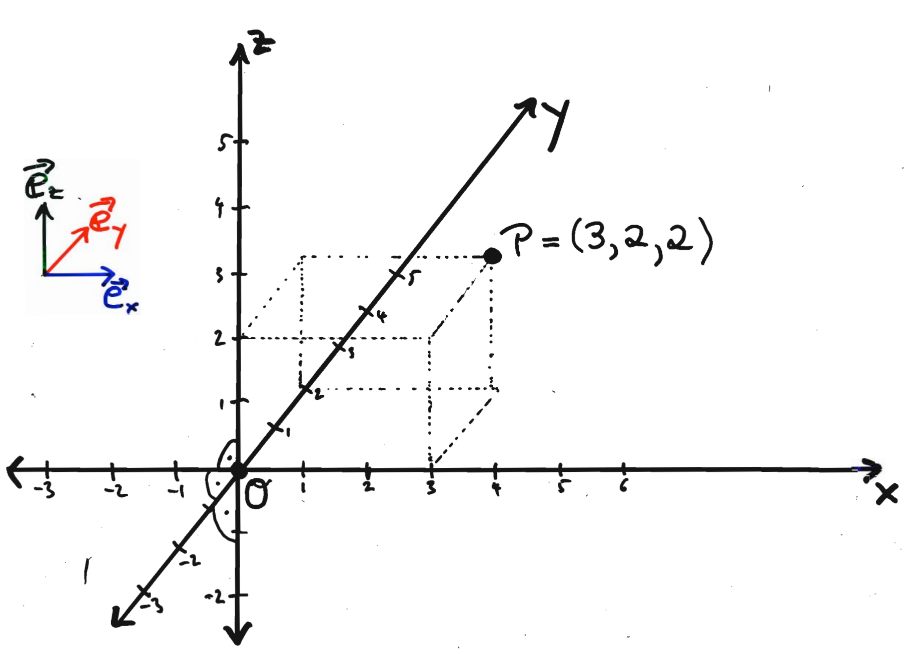
. . . Kartesische Koordinatensysteme

Die von $\overrightarrow{OP_x}$, $\overrightarrow{OP_y}$ und $\overrightarrow{OP_z}$ repräsentierten Raumvektoren $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ bzw. $\vec{e_z}$ sind eine **kartesische Basis** des Raumes. Sie bilden ein **Rechtssystem** (rechte-Hand-Regel).

Definition 2.21

Bezüglich eines durch $O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ festgelegten kartesischen Koordinatensystems hat ein Punkt Q die Koordinaten $(q_x, q_y, q_z) \in \mathbb{R}^3$, wobei $q_x/q_y/q_z$ die Zahl ist, welche die in Q verschobene Ebene $E_{yz}/E_{xz}/E_{xy}$ in Q auf der x- / y- / z-Achse anzeigt.

Beispiel



Wir können (bzgl. dieses Koordinatensystems) jeden Punkt P mit seinen Koordinaten (p_x, p_y, p_z) identifizieren. Wir schreiben $P = (p_x, p_y, p_z)$.

Koordinaten von Raumvektoren...

Definition 2.22

Für einen Punkt A ist der von $\overrightarrow{OA}$ repräsentierte Raumvektor der zu A gehörende **Ortsvektor**.

Bemerkung 2.23

Für einen Raumvektor $\vec{a}$, der durch $\overrightarrow{OA}$ mit $A = (a_x, a_y, a_z)$ repräsentiert wird, gilt

$$\vec{a} = a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z}.$$

*$(a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^3$ ist der **Koordinatenvektor** des Raumvektors $\vec{a}$. Schreibweise: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.*

...Koordinaten von Raumvektoren

Bemerkung 2.24

Repräsentiert $\overrightarrow{PQ}$ den Vektor $\vec{a}$ und sind $P = (p_x, p_y, p_z)$ und $Q = (q_x, q_y, q_z)$, so ist

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} q_x & - & p_x \\ q_y & - & p_y \\ q_z & - & p_z \end{pmatrix}.$$

Rechnen mit Raumvektoren

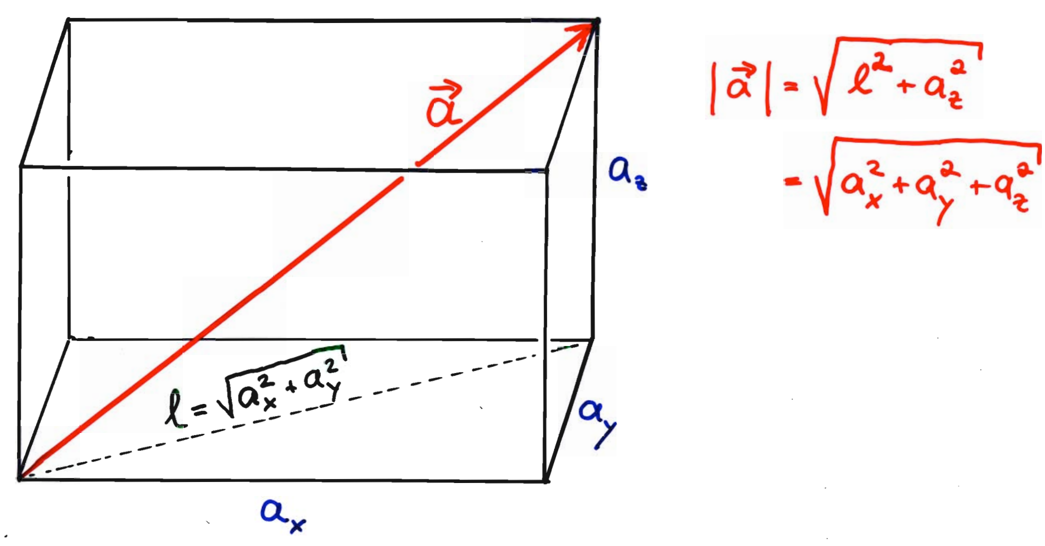
Bemerkung 2.25

Für Raumvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ *mit* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ *und* $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gelten:*

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z)$
- $\alpha\vec{a} = \alpha(a_x, a_y, a_z)$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \|(a_x, a_y, a_z)\|$

Addition, skalare Multiplikation und Beträge von Raumvektoren kann man also mit Hilfe ihrer Koordinatenvektoren in $\mathbb{R}^3$ *berechnen.*

Der Betrag



Abstände zwischen Punkten

Bemerkung 2.26

Der Abstand zweier Punkte P und Q mit Koordinaten $P = (p_x, p_y, p_z)$ und $Q = (q_x, q_y, q_z)$ und von $\overrightarrow{PQ}$ repräsentiertem Vektor $\vec{a}$ ist

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \end{pmatrix} \right|$$
$$= \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2 + (q_z - p_z)^2}\,.$$

Parallelität von Raumvektoren

Für Raumvektoren $\vec{a}, \vec{b}$, repräsentiert durch $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

gilt:
(a_x, a_y, a_z) und (b_x, b_y, b_z) sind genau dann linear abhängig, wenn die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ in einer Geraden liegen ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **parallel**). Dies ist insbesondere der Fall, wenn $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ ist.

Koplanarität von Raumvektoren

Für Raumvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, repräsentiert durch $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

gilt:
$(a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z), (c_x, c_y, c_z)$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ in einer Ebene liegen ($\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **koplanar**). Dies ist insbesondere der Fall, wenn $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{c} = \vec{0}$ ist oder wenn zwei der drei Vektoren parallel sind.

Skalarprodukt von Raumvektoren

Definition 2.27

Das **Skalarprodukt** (**innere Produkt**) zweier Raumvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

- $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := 0 \in \mathbb{R}$, falls $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ ist,
- ansonsten ist es

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R},$$

wobei $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$ der von den $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ repräsentierenden Pfeilen mit Anfangspunkt O eingeschlossene Winkel ist (also $\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [-1, 1]$).

Orthogonalität

Definition 2.28

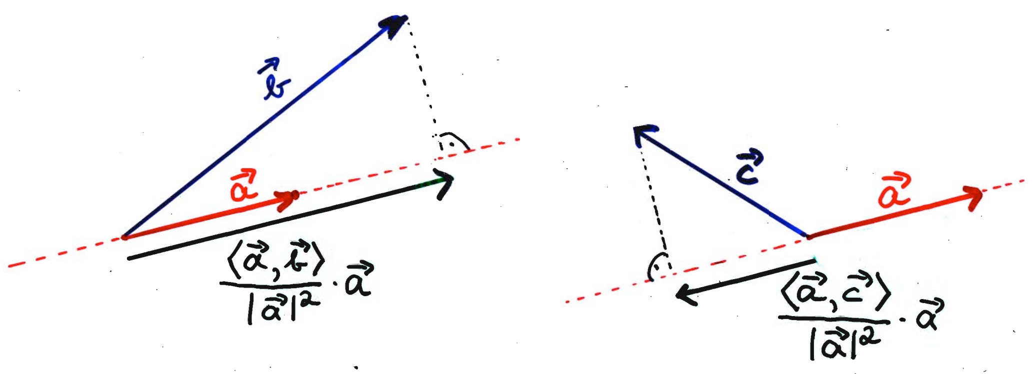
Stehen die beiden Raumvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht (orthogonal) aufeinander (d.h. $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$), so schreiben wir

$$\vec{a} \perp \vec{b}\,.$$

Bemerkung 2.29

- *Sind* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *und* $\vec{b} \neq \vec{0}$, *so gilt:*
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$
- $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$

Orthogonale Projektion



In einem Koordinatensystem

Satz 2.30

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Raumvektoren, so ist ihr Skalarprodukt das Skalarprodukt ihrer beiden Koordinatenvektoren (a_x, a_y, a_z) und (b_x, b_y, b_z):

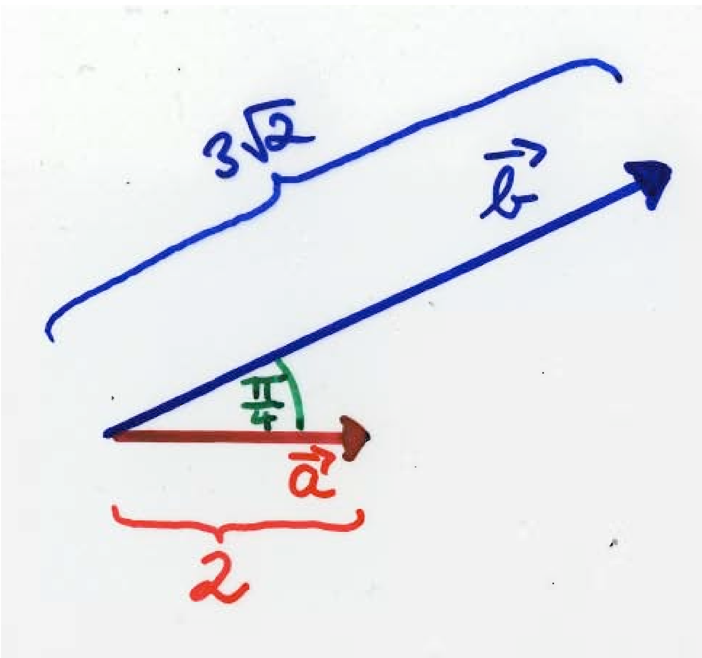
$$\begin{aligned}\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \langle (a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z) \rangle \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Insbesondere: $a_x = \langle \vec{a}, \vec{e}_x \rangle$, $a_y = \langle \vec{a}, \vec{e}_y \rangle$, $a_z = \langle \vec{a}, \vec{e}_z \rangle$

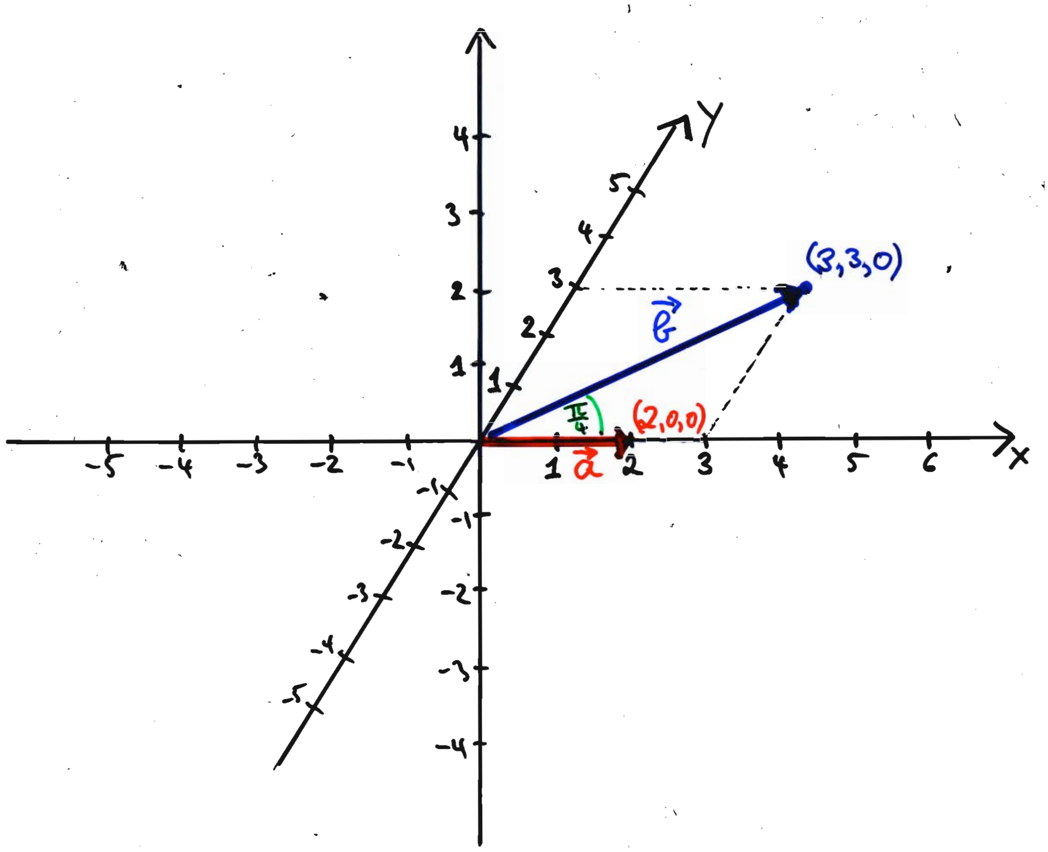
Bemerkung 2.31

Die Rechenregeln für Skalarprodukte in $\mathbb{R}^3$ übertragen sich auf Raumvektoren.

Beispiel. . .



. . . Beispiel



Das Vektorprodukt. . .

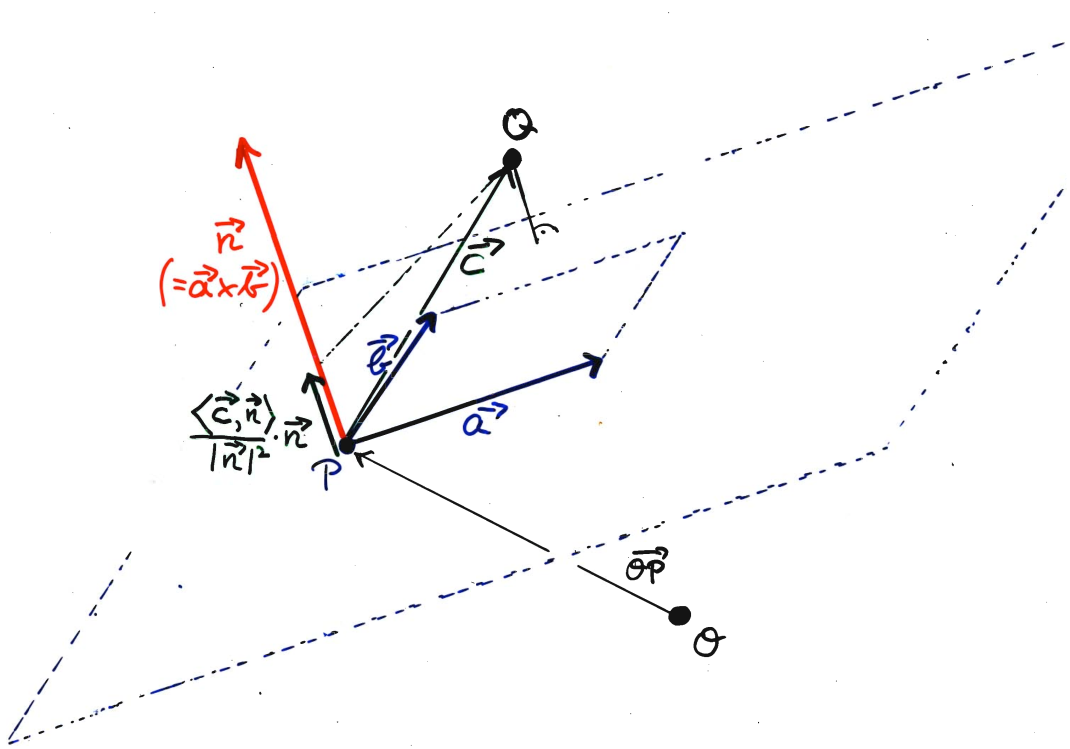
Definition 2.32

Das **Vektorprodukt** (**äußere Produkt**, **Kreuzprodukt**) zweier Raumvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, repräsentiert durch Pfeile $\overrightarrow{OA}$ bzw. $\overrightarrow{OB}$, ist der Raumvektor $\vec{a} \times \vec{b}$, der durch folgenden Pfeil $\overrightarrow{OC}$ repräsentiert wird:

. . . Das Vektorprodukt

- Falls $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ in einer Gerade liegen (insbesondere: wenn $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$): $C = O$ (also $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$)
- Sonst:
  - $\overrightarrow{OC}$ steht senkrecht auf der Ebene E, die $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ enthält.
  - Die Länge von $\overrightarrow{OC}$ ist der Flächeninhalt des von $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ erzeugten Parallelogramms.
  - Von C aus gesehen kann man $\overrightarrow{OA}$ in der Ebene E durch eine Drehung um den Punkt O um einen Winkel aus $]\,0, \pi\,[$ gegen den Uhrzeigersinn auf $\overrightarrow{OB}$ drehen. (Rechte-Hand-Regel)

Beispiel



Betrag des Kreuzprodukts

Bemerkung 2.33

Für Raumvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Insbesondere also:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind parallel.}$$

Rechenregeln

Für Raumvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Koordinatendarstellung des Kreuzprodukts

Satz 2.34

Haben die Raumvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Koordinaten $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, so gilt

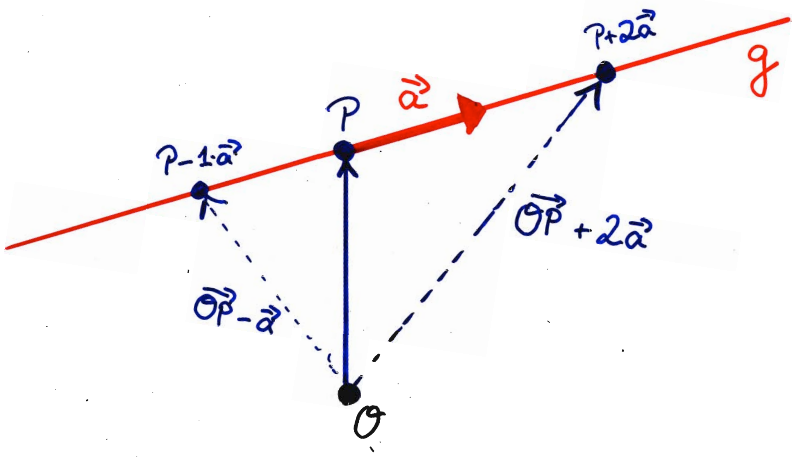
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z & - & a_z b_y \\ a_z b_x & - & a_x b_z \\ a_x b_y & - & a_y b_x \end{pmatrix}$$

Geraden

Ist $P = (p_x, p_y, p_z)$ ein Punkt und $\vec{0} \neq \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ein Raumvektor, so ist

$$\{P + t\vec{a} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Punkte auf der zu $\vec{a}$ parallelen Geraden g durch P.



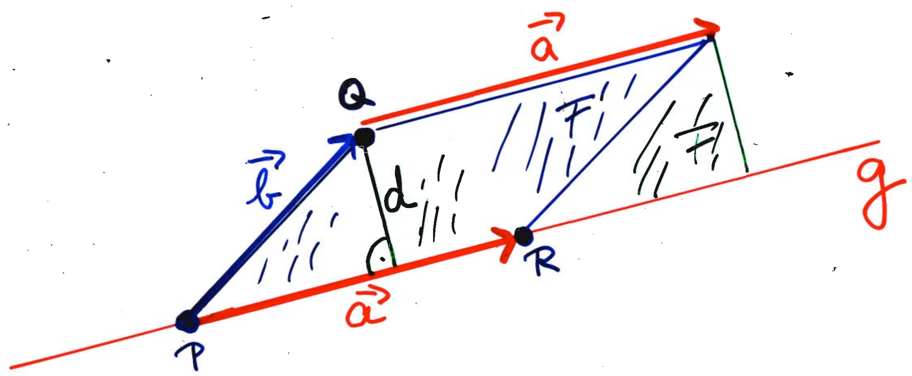
Parameterdarstellung von Geraden

Auf g liegen also genau die Punkte, deren Koordinaten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

für irgendein $t \in \mathbb{R}$ erfüllen.
(**Parameterdarstellung** der Geraden g)

Abstand Punkt – Gerade



$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot d$, und somit

$$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

Ebenen

Ist $P = (p_x, p_y, p_z)$ ein Punkt und sind $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ zwei nicht parallele Raumvektoren, repräsentiert von Pfeilen $\overrightarrow{PR}$ bzw. $\overrightarrow{PS}$, so ist

$$\{P + r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Punkte in der Ebene E, die $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{PS}$ enthält.

Parameterdarstellung von Ebenen

In E liegen also genau die Punkte, deren Koordinaten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

(mit $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$) für irgendwelche $r, s \in \mathbb{R}$ erfüllen.
(**Parameterdarstellung** der Ebene E)

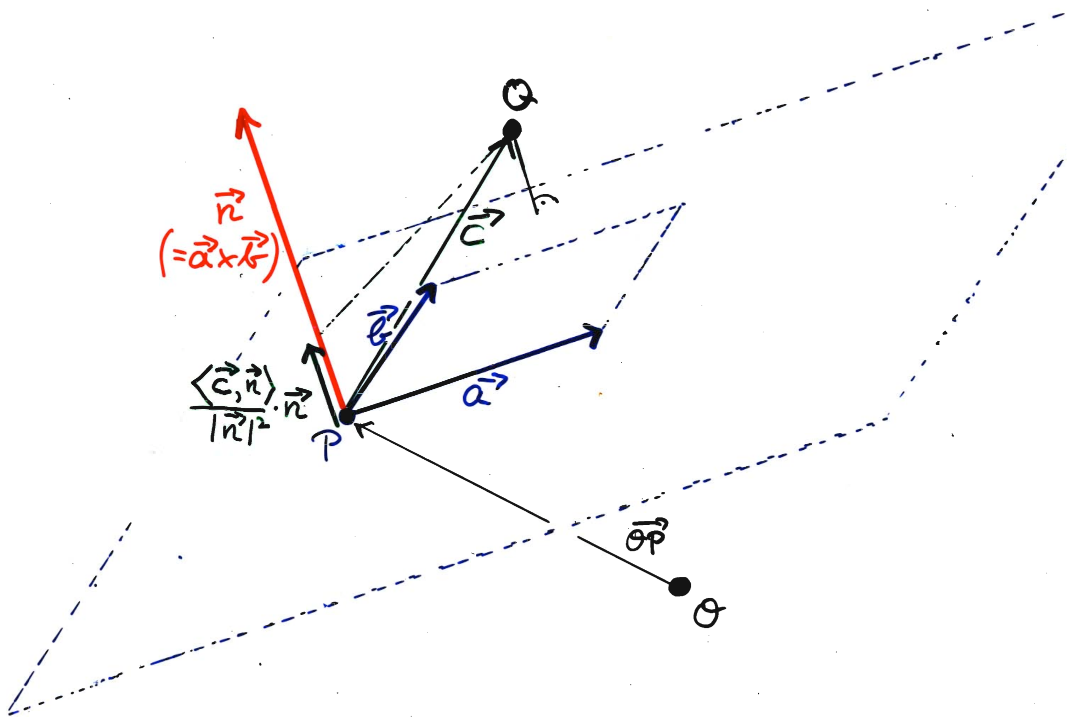
Normalenvektoren

- Ein Raumvektor, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht (also senkrecht auf E), heißt **Normalenvektor** von E.
- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Normalenvektor von E.
- Ist $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ein Normalenvektor von E, so liegt ein Punkt Q genau dann in E, wenn $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht zu $\vec{n}$ ist.In E liegen also genau die Punkte, deren Koordinaten (x, y, z) die Gleichung $\langle \vec{n}, \vec{c} \rangle = 0$ für den zu $\overrightarrow{PQ}$ gehörenden Raumvektor $\vec{c}$, also

$$n_x(x - p_x) + n_y(y - p_y) + n_z(z - p_z) = 0$$

erfüllen (**Hesse-Normalform** der Ebene).

Beispiel



Abstand Punkt – Ebene

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ ist Normalenvektor zu E. Dann ist der Abstand von Q zu E gleich

$$\left| \frac{\langle \vec{c}, \vec{n} \rangle}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} \right| = \frac{|\langle \vec{c}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{n}|},$$

wobei $\vec{c}$ der zu $\overrightarrow{PQ}$ gehörende Raumvektor ist.

Vektorräume

Definition 2.35

Eine Menge $V \neq \emptyset$ mit einem ausgezeichneten Element $\mathbb{O} \in V$ (**Nullvektor**), einer Additionsoperation $v + w$ (für $v, w \in V$) und einer skalaren Multiplikationsoperation $\lambda \cdot v = \lambda v$ (für $v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$) ist ein $\mathbb{K}$-**Vektorraum**, wenn folgende Axiome für alle $v, w, u \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ erfüllt sind:

Vektorraumaxiome

1. $v + w \in V, \lambda v \in V$ (Abgeschlossenheit)
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Assoziativität)
3. $v + \mathbb{O} = v$ (Neutrales Element)
4. Es gibt $v' \in V$ mit $v + v' = \mathbb{O}$. (Inverses Element)
5. $v + w = w + v$ (Kommutativität)
6. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ (Distributivität)
7. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ (Distributivität)
8. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ (Assoziativität)
9. $1v = v$ (Neutrales Element)

Unterräume

Definition 2.36

Ein **Unterraum** (**linearer Unterraum**, **Untervektorraum**) eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit

1. $\mathbb{O} \in U$
2. $v + w \in U$ für alle $v, w \in U$
3. $\lambda v \in U$ für alle $v \in U, \lambda \in \mathbb{K}$

Bemerkung 2.37

Untervektorräume sind selber Vektorräume.

Linearkombinationen

Definition 2.38

Ist $X \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, so heißt die Menge

$$\operatorname{span}(X) = \langle X \rangle := \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v^{(i)} \,:\, v^{(1)}, \dots, v^{(r)} \in X, \\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}, r \in \mathbb{N}\}$$

aller $\mathbb{K}$-**Linearkombinationen** von endlich vielen Elementen aus X der von X **erzeugte/aufgespannte Unterraum** von V.

Affine Unterräume

Definition 2.39

Ein **affiner Unterraum** eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V ist eine Teilmenge der Form

$$v + U = \{v + u \,|\, u \in U\}$$

mit einem Vektor v und einem Unterraum U von V.

Linear unabhängige Vektoren

Definition 2.40

Die Vektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißen **linear unabhängig**, falls man keinen der Vektoren als Linearkombination der übrigen Vektoren schreiben kann, andernfalls heißen sie **linear abhängig**.

Kriterium für lineare Unabhängigkeit

Bemerkung 2.41

Die Vektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(r)} \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v^{(i)} = \mathbb{O}$$

(mit $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$) nur für $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ gilt.

Lineare Unabhängigkeit von Teilmengen

Definition 2.42

Eine (möglicherweise unendliche) Teilmenge $X \subseteq V$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V ist **linear unabhängig**, falls jede Auswahl von endlich vielen paarweise verschiedenen Vektoren in X linear unabhängig ist.

Erzeugendensysteme / Basen

Definition 2.43

Ein **Erzeugendensystem** eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V ist eine Teilmenge $X \subseteq V$ mit $V = \operatorname{span}(X)$. Eine **Basis** von V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V.

Existenz von Basen

Satz 2.44

Jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum V hat (wenigstens) eine Basis.

Bemerkung 2.45

Es gilt sogar für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum V:

- *Jedes Erzeugendensystem von V enthält eine Basis.*
- *Jede linear unabhängige Teilmenge kann zu einer Basis von V ergänzt werden.*

Dimension

Satz 2.46

*Hat ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V ein endliches Erzeugendensystem, so haben alle Basen von V die gleiche Kardinalität $\dim(V)$ (**Dimension** von V).*

Bemerkung 2.47

In einem n-dimensionalen Vektorraum bilden n linear unabhängige Vektoren immer eine Basis.

Koordinaten

Definition 2.48

Ist $B \subset V$ eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums und $v \in V$, so heißen die eindeutig bestimmten $\lambda_b \in \mathbb{K}$ $(b \in B)$ (genauer: die durch $b \mapsto \lambda_b$ definierte Abildung) mit $v = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ die **Koordinaten** von v bzgl. B.

Koordinatenvektoren

Definition 2.49

Ist $B = (b^{(1)}, \ldots, b^{(n)})$ eine **geordnete Basis** von V (d.h. die Menge $\{b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}\}$ ist eine Basis von V), so heißt für jeden Vektor $v \in V$ das eindeutig bestimmte n-Tupel ${}_B v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ mit $v = \sum_{i=1} \lambda_i b^{(i)}$ der **Koordinatenvektor** von v (bzgl. der geordneten Basis $(b^{(1)}, \ldots, b^{(n)})$).